CAPÍTULO 2

ÁLGEBRA LINEAR

Ao longo do curso de pesquisa operacional, conceitos matemáticos como matrizes e vetores são largamente utilizados. Este capítulo tem como objetivo apresentar uma revisão desses fundamentos matemáticos, de modo que o curso possa ser compreendido.

2.1 Vetores

Um vetor é um conjunto de números, que pode ser escrito como

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots , p_n).$$

O vetor **p** é um vetor de dimensão n, ou seja, possui n elementos. Vetores são geralmente representadas por letras minúsculas em negrito, e seus elementos são geralmente representados por letras minúsculas com um subscrito. A letra usada para os elementos é normalmente a mesma letra utilizada para o vetor. O subscrito representa o índice do elemento no vetor. Por exemplo, p_2 é o segundo elemento do vetor. A notação p_i indica o i-ésimo elemento do vetor.

2.1.1 Soma e subtração de vetores

Dois vetores podem ser adicionados se e somente se eles tiverem a mesma dimensão. Para somar dois vetores, basta somar individualmente cada elemento deles. O vetor resultante será da mesma dimensão do vetores originais. Simbolicamente, temos que, se $\mathbf{r} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, então $r_i = p_i + q_i$, para todo i.

Dados os vetores

$\mathbf{p} = (4, 5, 1, 7)$ $\mathbf{q} = (1, -2, 3, -4)$ $\mathbf{r} = (1, 5, 4)$

temos que:

- ✓ $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (5, 3, 4, 3)$;
- ✓ não é possível computar $\mathbf{p} + \mathbf{r}$, nem $\mathbf{q} + \mathbf{r}$, visto que **p** e **q** são de 4ª dimensão e **r** é de 3ª.

Um vetor pode ser multiplicado por um escalar, multiplicando-se cada elemento do vetor por este escalar. Por exemplo,

$$2\ (1, 3, -2) = (2, 6, -4)$$

Subtração entre dois vetores é equivalente a somar o primeiro com o produto do segundo pelo escalar -1. Então $\mathbf{s} - \mathbf{t} = \mathbf{s} + (-\mathbf{t})$. Por exemplo.

$$(1, 4, 3) - (0, 2, -1) = (1, 4, 3) + (0, -2, 1) = (1, 2, 4)$$

2.1.2 Vetores LD e LI

Um conjunto de vetores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots , \mathbf{p}_n$, é dito linearmente independente (LI) se e somente se, para todo q_j real,

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

implica que todo $q_j = 0$, onde q_j são quantidades escalares. Se

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \mathbf{p}_j = \mathbf{0}$$

para algum $q_j \neq 0$, os vetores são ditos linearmente dependentes (LD). Por exemplo, os vetores

$$\mathbf{p}_1 = (1, 2) \qquad \mathbf{p}_2 = (2, 4)$$

são linearmente dependentes, já que existe $q_1 = 2$ e $q_2 = -1$ para os quais

$$q_1 \mathbf{p}_1 + q_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}.$$

2.2 Matrizes

Uma matriz é um conjunto retangular de números, que pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ a_{m1} & a_{mn} & & & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

A matriz **A** é uma matriz de ordem *m* x *n*, ou seja, possui *m* linha e *n* colunas. Matrizes são geralmente representadas por letras maiúsculas em negrito, e seus elementos são geralmente representados por letras minúsculas com dois subscritos. A letra usada para os elementos é normalmente a mesma letra utilizada para a matriz. Os subscritos representam respectivamente a linha e a coluna ocupadas pelo elemento na matriz. Por exemplo, a_{23} é o elemento localizado na segunda linha e na terceira coluna da matriz. A notação a_{ij} indica o elemento localizado na *i*-ésima linha e na *j*-ésima coluna da matriz.

Duas matrizes **A** e **B** são iguais se $a_{ij} = b_{ij}$ para qualquer *i* e *j*. Para isso, é necessário que as matrizes **A** e **B** sejam de mesma ordem, ou seja, tenham o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

2.2.1 Soma e subtração de matrizes

Duas matrizes podem ser adicionadas se e somente se elas forem da mesma ordem. Para somar duas matrizes, basta somar individualmente cada elemento delas. A matriz resultante será da mesma ordem das matrizes originais. Simbolicamente, temos que, se **C** = **A** + **B**, então $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo *i* e *j*.

Dadas as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

temos que:

- ✓ as matrizes **A** e **C** são iguais;
- ✓ $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4 & 3\\ 7 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$;
- ✓ não é possível computar **A** + **D**, nem **B** + **D**, visto que **A** e **B** são 3 x 4 e **D** é 3 x 3.

Uma matriz pode ser multiplicada por um escalar, multiplicando-se cada elemento da matriz por este escalar. Por exemplo,

$$2\begin{pmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 6\\ -4 & 0\end{pmatrix}.$$

Subtração entre duas matrizes é equivalente a somar a primeira com o produto da segunda pelo escalar -1. Então **E** - **F** = **E** + (-**F**). Por exemplo.

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$$

2.2.2 Produto de matrizes

O produto de duas matrizes somente pode ser efetuado se o número de colunas da matriz à esquerda for igual ao número de linhas da matriz à direita. O produto de matrizes é, em geral, não comutativo, ou seja, dadas duas matrizes **A** e **B** e seu produto, **AB**, o produto **BA** pode não existir e, se existe, pode *não ser igual* a **AB**. O produto de duas matrizes tem o número de linhas da matriz à esquerda e o número de colunas da matriz à direita. Ou seja, sendo **C** = **AB**, se **A** é *m* x *n* e **B** é *n* x *p*, **C** é *m* x *p*.

Os elementos da matriz resultante são calculados através do somatório dos produtos de elementos das duas matrizes. Especificamente, c_{ij} é calculado por $a_{i1}\,b_{1j} + a_{i2}\,b_{2j} + \ldots + a_{in}\,b_{nj}$, onde n é o número de colunas de **A** e de linhas de **B**.

Exemplos:

1. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

   $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}4 & -3 & -1\\ 7 & 7 & 10\end{pmatrix}$ (**BA** não existe)

2. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

   $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$ $\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}-3 & 0 & -7\\ 1 & -1 & 4\\ 7 & 5 & 8\end{pmatrix}$

Note que no primeiro exemplo existe apenas o produto **AB**, não sendo possível efetuar o produto **BA**. No segundo exemplo, apesar de ser possível efetuar os dois produtos, as matrizes resultantes não são iguais, não sendo sequer do mesmo tipo.

2.2.3 Matrizes especiais

Matriz quadrada

Uma matriz quadrada tem o mesmo número de linhas e de colunas. A *ordem* de uma matriz quadrada é o seu número de linhas (ou de colunas).

Exemplos: matrizes 2 x 2 (2ª ordem), 3 x 3 (3ª ordem), *n* x *n* (*n*-ésima ordem).

Matriz nula

Uma matriz nula possui zeros em todos os seus elementos.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A matriz nula é equivalente ao zero para adição em álgebra escalar, ou seja, se **B** é uma matriz nula de mesmo tipo de **A**, então **A** + **B** = **B** + **A** = **A**.

Matriz identidade

Uma matriz identidade, denotada por **I**, é uma matriz quadrada onde sua diagonal principal é composta de 1's e todos os outros elementos são zero.

Exemplos: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A matriz identidade é equivalente ao um para produto em álgebra escalar, ou seja, **AI** = **A**.

Matriz transposta

A transposta de uma matriz é a matriz obtida pela troca das linhas pelas colunas da matriz original, de modo que a coluna *j* da matriz original passe a ser a linha *j* da matriz transposta e a linha *i* da matriz original passe a ser a coluna *i* da matriz transposta. A transposta de uma matriz **A** é indicada pela notação $\mathbf{A}^T$ ou **A'**.

Exemplos: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

A transposta de uma matriz *m* x *n* será sempre uma matriz *n* x *m*.

Matriz simétrica

Uma matriz é dita simétrica se ela for igual à sua transposta. Ou seja, uma matriz **A**, simétrica, é necessariamente quadrada e $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplos: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Matriz anti-simétrica

Uma matriz é dita anti-simétrica se ela for simétrica à sua transposta, isto é, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$. Ou seja, uma matriz **A**, simétrica, é necessariamente quadrada e $a_{ij} = -a_{ji}$. Os elementos da diagonal principal de uma matriz anti-simétrica são necessariamente nulos.

Exemplos: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.2.4 A inversa de uma matriz

A operação de divisão não é definida em álgebra matricial. Entretanto, para certas matrizes quadradas existe outra (única) matriz quadrada de mesma ordem que o produto das duas matrizes é a matriz identidade. Esta matriz é chamada de matriz inversa da primeira matriz. A inversa de uma matriz é designada pelo expoente -1.

Exemplo: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$

2.3 Sistemas de Equações Lineares

Tanto as linhas quanto as colunas de uma matriz podem ser tratadas por vetores. Um vetor pode ser considerado uma matriz de uma única linha, ou uma única coluna. Quando um vetor é considerado uma matriz com uma única linha, é chamado *vetor linha*. Quando é uma matriz de uma única coluna, é chamado de *vetor coluna*. Um vetor coluna será representado da mesma forma que um vetor convencional, ou seja, uma letra minúscula em negrito (**p**, **q**, **r**). Quando for o caso de um vetor linha, ele será representado como um vetor transposto ($\mathbf{p}^T$, $\mathbf{q}^T$, $\mathbf{r}^T$).

Suponha o seguinte sistema de equações lineares:

$$2x_1 - x_2 = 7$$

$$-x_1 + 4x_2 = 0$$

Este sistema pode ser representado na forma matricial por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

onde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

O vetor coluna **x** é o vetor solução do sistema de equações e pode ser calculado por

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{b}.$$

Para a solução de um sistema de equações lineares, são propostos alguns métodos.

2.3.1 Método algébrico por adição

Pelo menos uma das equações deve ser multiplicada por um escalar real, de modo que, após a soma das equações, apenas uma das variáveis seja efetivamente a incógnita do problema. Por exemplo,

$$4\,x_1 + 8\,x_2 = 160$$

$$6\,x_1 + 4\,x_2 = 120$$

Multiplicando a segunda equação por (-2), temos

$$4\,x_1 + 8\,x_2 = 160$$

$$-12\,x_1 - 8\,x_2 = -240$$

Somando as duas equações, chega-se a:

$$-8\,x_1 = -80$$

Daí, calcula-se facilmente o valor de x_1 e, substituindo este valor em qualquer uma das equações acima, calcula-se o valor de x_2.

$$x_1 = 10$$

$$x_2 = 15$$

2.3.2 Método algébrico por substituição

Isola-se uma das variáveis em uma das equações, substituindo-se a relação obtida na outra equação. Por exemplo,

$$4\,x_1 + 8\,x_2 = 160$$

$$6\,x_1 + 4\,x_2 = 120$$

Manipulando a primeira equação, temos que

$$x_1 = \frac{160 - 8x_2}{4} = 40 - 2x_2$$

Substituindo x_1 na segunda equação,

$$6\,(40 - 2\,x_2) + 4\,x_2 = 120$$

Resolvendo a equação algebricamente, e aplicando o valor de x_2 encontrado na primeira equação

$$240 - 12\,x_2 + 4\,x_2 = 120$$

$$-8\,x_2 = -120$$

$$x_2 = 15$$

$$x_1 = 10$$

2.3.3 Método de Gauss-Jordan

Consiste da derivação de um sistema específico de equações lineares que tenha a mesma solução que o sistema original. Este novo sistema deverá ter o formato de uma matriz identidade, o que pode ser obtido através de combinações lineares das equações originais. Assim, pretende-se que

$$\begin{array}{l} 4\,x_1 + 8\,x_2 = 160 \\ 6\,x_1 + 4\,x_2 = 120 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} 1\,x_1 + 0\,x_2 = \mathrm{a} \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 = \mathrm{b} \end{array}$$

São permitidas as seguintes transformações lineares:

Troca de linhas
Multiplicação da linha por um escalar
Soma de uma linha multiplicada por um escalar a uma outra linha

Notação:

$L_n \leftrightarrow L_m$	troca das linhas *n* e *m*;
$L_n \leftarrow k\,L_n$	multiplicação da linha *n* pelo escalar *k*;
$L_n \leftarrow L_n + k\,L_m$	soma da linha *m* multiplicada pelo escalar *k* à linha *n*.

Para resolver o exemplo acima, são seguidos os seguintes passos:

1. $L_1 \leftarrow L_1 / 4$ (divisão da linha 1 por 4) - transformação do coeficiente de x_1 na equação 1 para 1.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2\,x_2 = 40 \\ 6\,x_1 + 4\,x_2 = 120 \end{array}$$

2. $L_2 \leftarrow L_2 - 6\,L_1$ (subtração da linha 2 pela linha 1 multiplicada por 6) - transformação do coeficiente de x_1 na equação 2 para 0.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2\,x_2 = 40 \\ 0\,x_1 - 8\,x_2 = -120 \end{array}$$

3. $L_2 \leftarrow -\,L_2 / 8$ (divisão da linha 2 por (-8)) - transformação do coeficiente de x_2 na equação 2 para 1.

$$\begin{array}{c} x_1 + 2\,x_2 = 40 \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 = 15 \end{array}$$

4. $L_1 \leftarrow L_1 - 2\,L_2$ (subtração da linha 1 pela linha 2 multiplicada por 2) - transformação do coeficiente de x_2 na equação 1 para 0.

$$\begin{array}{c} x_1 + 0\,x_2 = 10 \\ 0\,x_1 + 1\,x_2 = 15 \end{array}$$

Solução

$$\begin{array}{c} x_1 = 10 \\ x_2 = 15 \end{array}$$