CAPÍTULO 3

PROGRAMAÇÃO LINEAR

3.1 Definição

O problema geral de programação linear é utilizado para otimizar (maximizar ou minimizar) uma função linear de variáveis, chamada de "função objetivo", sujeita a uma série de equações ou inequações lineares, chamadas restrições. A formulação do problema a ser resolvido por programação linear segue alguns passos básicos.

- ✓ deve ser definido o objetivo básico do problema, ou seja, a otimização a ser alcançada. Por exemplo, maximização de lucros, ou de desempenhos, ou de bem-estar social; minimização de custos, de perdas, de tempo. Tal objetivo será representado por uma função objetivo, a ser maximizada ou minimizada;
- ✓ para que esta função objetivo seja matematicamente especificada, devem ser definidas as variáveis de decisão envolvidas. Por exemplo, número de máquinas, a área a ser explorada, as classes de investimento à disposição etc. Normalmente, assume-se que todas estas variáveis possam assumir somente valores positivos;
- ✓ estas variáveis normalmente estão sujeitas a uma série de restrições, normalmente representadas por inequações. Por exemplo, quantidade de equipamento disponível, tamanho da área a ser explorada, capacidade de um reservatório, exigências nutricionais para determinada dieta etc.

Todas essas expressões, entretanto, devem estar de acordo com a hipótese principal da programação linear, ou seja, todas as relações entre as variáveis deve ser lineares. Isto implica proporcionalidade das quantidades envolvidas. Esta característica de linearidade pode ser interessante no tocante à simplificação da estrutura matemática envolvida, mas prejudicial na representação de fenômenos não lineares (por exemplo, funções de custo tipicamente quadráticas).

3.2 Formulação de Modelos

O problema geral de programação linear pode ser definido por

Maximizar (ou minimizar)

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n$$

sujeito a

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + ... + a_{1n} x_n \le b_1 \text{ (ou } \ge \text{, ou =)}$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + ... + a_{2n} x_n \le b_2 \text{ (ou } \ge \text{, ou =)}$$

$$...$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + ... + a_{mn} x_n \le b_m \text{ (ou } \ge \text{, ou =)}$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$$

3.3 Exemplo

Vamos rescrever aqui o exemplo da seção 1.3.

"Uma empresa de comida canina produz dois tipos de rações: Tobi e Rex. Para a manufatura das rações são utilizados cereais e carne. Sabe-se que:

- ✓ a ração Tobi utiliza 5 kg de cereais e 1 kg de carne, e a ração Rex utiliza 4 kg de carne e 2 kg de cereais;
- ✓ o pacote de ração Tobi custa \$ 20 e o pacote de ração Rex custa \$ 30;
- ✓ o kg de carne custa \$ 4 e o kg de cereais custa \$ 1;
- ✓ estão disponíveis por mês 10 000 kg de carne e 30 000 kg de cereais.

Deseja-se saber qual a quantidade de cada ração a produzir de modo a maximizar o lucro."

Nosso modelo deseja maximizar o lucro (Z) a partir da quantidade de ração Tobi (x_1) e de ração Rex (x_2). A Tabela 3.1 apresenta o cálculo do lucro unitário de cada ração.

Tabela 3.1 - Cálculo do lucro unitário de cada ração

	Ração Tobi	Ração Rex
Custo de carne	1 kg x \$ 4 = \$ 4	4 kg x \$ 4 = \$ 16
Custo de cereais	5 kg x \$ 1 = \$ 5	2 kg x \$ 1 = \$ 2
Custo total	\$ 9	\$ 18
Preço	\$ 20	\$ 30
Lucro	\$ 11	\$ 12

A função objetivo pode ser escrita como

maximizar $Z = 11\ x_1 + 12\ x_2$

sujeito a: $1\ x_1 + 4\ x_2 \leq 10000$ (restrição de carne)

$5\ x_1 + 2\ x_2 \leq 30000$ (restrição de cereais)

$x_1, x_2 \geq 0$ (positividade das variáveis)

3.4 Solução Gráfica

Este problema com apenas duas variáveis pode ser resolvido graficamente. Traça-se um gráfico com os seus eixos sendo as duas variáveis x_1 e x_2. A partir daí, traçam-se as retas referentes às restrições do problema e delimita-se a região viável (Figura 3.1).

Encontrada a região viável, deve-se traçar uma reta com a inclinação da função objetivo. São então traçadas diversas paralelas a ela no sentido de Z crescente (maximização da função), como na Figura 3.2. O ponto ótimo é o ponto onde a reta de maior valor possível corta a região viável (normalmente num vértice).

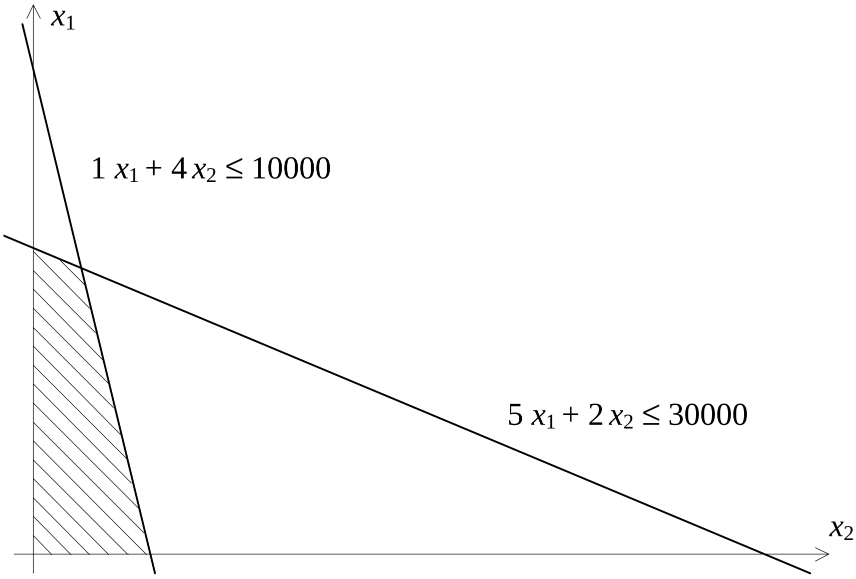

Figura 3.1 - Região viável para o problema das rações.

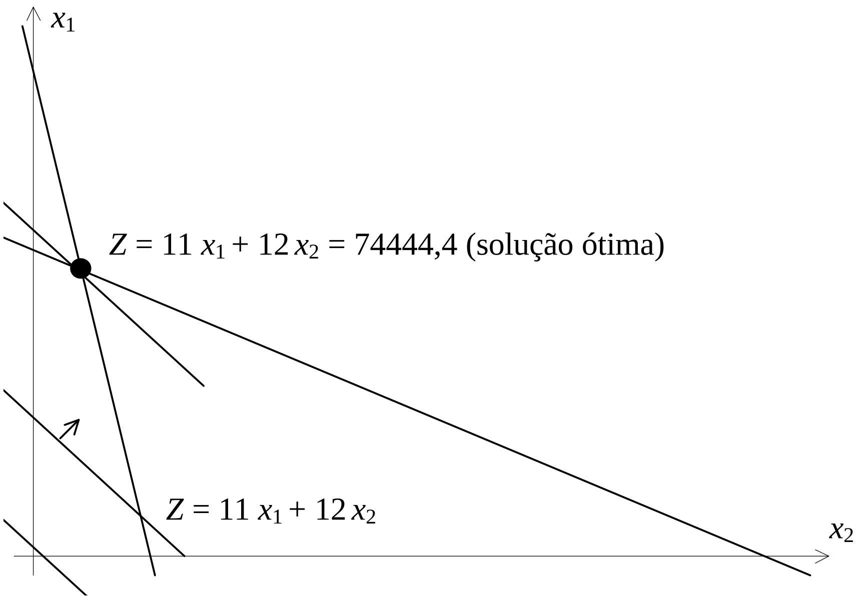

Figura 3.2 - Busca da solução ótima para o problema das rações.