CAPÍTULO 4

O MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex caminha pelos vértices da região viável até encontrar uma solução que não possua soluções vizinhas melhores que ela. Esta é a solução ótima. A solução ótima pode não existir em dois casos: quando não há nenhuma solução viável para o problema, devido a restrições incompatíveis; ou quando não há máximo (ou mínimo), isto é, uma ou mais variáveis podem tender a infinito e as restrições continuarem sendo satisfeitas, o que fornece um valor sem limites para a função objetivo.

4.1 Exemplo de um Problema

O modelo de programação linear pode ser resolvido por um método de solução de sistema de equações lineares. O processo que será apresentado no exemplo a seguir, retirado de ANDRADE (2000), é bastante intuitivo e tem por finalidade apresentar a metodologia utilizada pelo método Simplex.

a) Formulação do problema

"Uma marcenaria deseja estabelecer uma programação diária de produção. Atualmente, a oficina faz apenas dois produtos: mesa e armário, ambos de um só modelo. Para efeito de simplificação, vamos considerar que a marcenaria tem limitações em somente dois recursos: madeira e mão-de-obra, cujas disponibilidades diárias são mostradas na tabela a seguir.

Recurso	**Disponibilidade**
Madeira	$12m^2$
Mão-de-obra	8 H.h

O processo de produção é tal que, para fazer uma mesa a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 2 H.h de mão-de-obra. Para fazer um armário, a fábrica gasta 3 m^2 de madeira e 1 H.h de mão de obra.

Além disso, o fabricante sabe que cada mesa dá uma margem de contribuição para o lucro de $ 4 e cada armário de $ 1. O problema é encontrar o programa de produção que maximiza a margem de contribuição total para o lucro."

b) Montagem do modelo

As variáveis de decisão envolvidas no problema são:

x_1: quantidade a produzir de mesas

x_2: quantidade a produzir de armários

A função objetivo é:

Lucro: $z = 4\,x_1 + x_2$

Para as restrições, a relação lógica existente é:

Utilização de recurso ≤ Disponibilidade

Assim temos

Madeira: $2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 12$

Mão-de-obra: $2\,x_1 + x_2 \leq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

O modelo completo é:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & z = 4\,x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & 2\,x_1 + 3\,x_2 \leq 12 \\ & 2\,x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

c) Solução do modelo

Já conhecemos o método de solução gráfica para problemas de programação linear de duas variáveis. Será agora apresentada a solução por sistemas de equações lineares.

De forma a transformar as restrições do problema de programação linear de inequações em equações, são introduzidas as variáveis de folga. Neste problema, as restrições têm a seguinte estrutura lógica:

Utilização de recurso ≤ Disponibilidade.

Ao se introduzir o conceito de folga de recurso, a inequação pode ser escrita como

Utilização de recurso + Folga = Disponibilidade.

Isso significa que

Utilização de recurso < Disponibilidade implica Folga > 0;

Utilização de recurso = Disponibilidade implica Folga = 0.

Deste modo, a folga de cada recurso pode ser representada por uma variável de forma exatamente igual à produção de cada produto. Desse modo, vamos chamar:

f_1: folga de madeira;

f_2: folga de mão-de-obra.

Introduzindo as variáveis de folga, o problema a ser resolvido passa a ser:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar:} & z = 4\,x_1 + x_2 \\ \text{Sujeito a} & 2\,x_1 + 3\,x_2 + f_1 = 12 \\ & 2\,x_1 + x_2 + f_2 = 8 \\ & x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0 \end{array}$$

O problema se transformou em encontrar a solução do sistema de equações lineares que maximiza o lucro. Como neste caso o número de variáveis (m = 4) é superior ao número de equações (n = 2), o sistema é indeterminado, apresentando infinitas soluções.

No entanto, todas as variáveis devem ser maiores ou iguais a zero. Atribuir zero a uma variável significa não produzir um dos produtos (se a variável for x_1 ou x_2) ou utilizar toda a disponibilidade de recursos (se a variável for f_1 ou f_2). Desta forma, podemos encontrar soluções para o sistema de equações zerando duas variáveis (n - m = 2) e encontrando o valor para as duas variáveis restantes. Teremos que resolver então

$$C_4^2 = 4! / (2!\ 2!) = 6$$

sistemas de equações lineares.

Uma vez resolvido um sistema, serão aplicados na função objetivo os valores encontrados. As variáveis zeradas são chamadas variáveis não-básicas. As variáveis cujos valores são calculados pelo sistema de equações são chamadas variáveis básicas.

c.1) Variáveis não-básicas: $x_1 = 0$

$x_2 = 0$

temos as variáveis básicas $f_1 = 12$

$f_2 = 8$

dando o lucro $z = 0$

c.2) Variáveis não-básicas: $x_1 = 0$

$f_1 = 0$

temos as variáveis básicas $x_2 = 4$

$f_2 = 4$

dando o lucro $z = 4$

c.3) Variáveis não-básicas: $x_1 = 0$

$f_2 = 0$

temos as variáveis básicas $x_2 = 8$

$f_1 = -12$

como $f_1 < 0$, a solução obtida é INVIÁVEL.

c.4) Variáveis não-básicas: $x_2 = 0$

$f_1 = 0$

temos as variáveis básicas $x_1 = 6$

$f_2 = -4$

como $f_2 < 0$, a solução obtida é INVIÁVEL.

c.5) Variáveis não-básicas: $x_2 = 0$

$f_2 = 0$

temos as variáveis básicas $x_1 = 4$

$f_1 = 4$

dando o lucro $z = 16$

c.6) Variáveis não-básicas: $f_1 = 0$

$f_2 = 0$

temos as variáveis básicas $x_1 = 3$

$x_2 = 2$

dando o lucro $z = 14$

Comparando todas as soluções encontradas por este processo, achamos a solução ótima, ou seja, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $f_1 = 4$, $f_2 = 0$, dando um lucro $z = 16$.

4.2 Desenvolvimento do Método Simplex

Da forma como foi resolvido o problema anteriormente, é necessário que muitos sistemas de equações sejam resolvidos e suas soluções comparadas. Para problemas reais de programação linear, esta solução se torna inviável. Desta forma, para termos condições de resolver um problema de programação linear, precisamos de uma sistemática que nos diga:

- ✓ qual o sistema de equações que deve ser resolvido;
- ✓ que o próximo sistema a ser resolvido fornecerá uma solução melhor que os anteriores;
- ✓ como identificar um solução ótima, uma vez que a tenhamos encontrado.

Essa sistemática é o método Simplex, e as regras que o método utiliza para atender às três questões acima são, basicamente, os critérios que desenvolvemos nos itens anteriores. Vamos voltar ao nosso pequeno problema, já com as variáveis de folga:

maximizar $z = 4\,x_1 + x_2$

sujeito a $2\,x_1 + 3\,x_2 + f_1 = 12$

$2\,x_1 + x_2 + f_2 = 8$

$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

Vamos montar um quadro para ordenarmos as operações, colocando nele apenas os coeficientes das variáveis. No caso da função objetivo, vamos realizar a seguinte transformação:

de: $z = 4\,x_1 + x_2$

para: $z - 4\,x_1 - x_2 = 0$

Quadro 1

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	2	3	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
z	-4	-1	0	0	0

A última coluna corresponde aos termos independentes das equações, e a última linha contém os coeficientes das variáveis na função objetivo. Nessa última linha teremos sempre a contribuição que cada variável dá para o lucro total z, por unidade, em cada iteração do processo de solução. Essa última linha será chamada de função objetivo transformada, ou função z-transformada.

a) Solução inicial

A solução inicial para o problema será sempre obtida fazendo as variáveis originais do modelo (no caso x_1 e x_2) iguais a zero e achando o valor das demais.

Assim, fazendo $x_1 = x_2 = 0$ (variáveis não básicas), obtemos do Quadro 1:

$f_1 = 12$

$f_2 = 8$ (variáveis básicas)

$z = 0$

As variáveis básicas estão indicadas no Quadro 1, para facilitar o acompanhamento das operações.

b) Segunda solução

Como a primeira solução claramente não é a melhor, vamos procurar outra que dê um valor maior para z. O problema é descobrir:

- ✓ Das duas variáveis não básicas (nulas) na primeira solução, qual deve se tornar positiva?
- ✓ Das duas variáveis básicas (positivas) na primeira solução, qual deverá ser anulada?

Qual variável deverá se tornar positiva?

Vamos observar que na última linha do Quadro 1 temos os coeficientes da função objetivo que mostram a contribuição para o lucro z de cada unidade produzida de *mesa* (x_1) e de *armário* (x_2). Assim, aplicando o critério de que devemos produzir primeiro o produto que mais contribui para o lucro, vamos começar a produção pela variável x_1, já que sua contribuição unitária para o lucro (4) é maior que a contribuição de x_2, igual a 1.

Logo, a variável que deverá se tornar positiva é x_1.

Qual variável deverá ser anulada?

Nota-se pelo Quadro 1 que, na primeira equação, o maior valor possível de x_1 é 6, quando f_1 for igual a zero (note que x_2 vale zero por ser variável não básica). Qualquer valor maior de x_1 fará com que o valor de f_1 fique negativo, o que não é permitido. Na segunda equação, o maior valor permitido para x_1 é 4, quando f_2 for igual a zero. Analisando simultaneamente as duas equações, percebe-se que o maior valor possível para x_1 é 4, já que atende às duas equações.

Observe que esta análise pode ser feita diretamente do Quadro 1, através da divisão dos elementos da coluna b pelos correspondentes elementos da coluna x_1. O menor quociente indica, pela linha em que ocorreu, qual a variável básica que deve ser anulada. Assim, como o menor quociente é dado pela divisão 8 / 2 = 4, a variável básica a ser anulada é f_2, que é a variável positiva na atual solução, cujo valor foi encontrado na segunda linha.

Assim temos:

$x_2 = 0$

$f_2 = 0$

e o sistema restante deve ser resolvido para acharmos o valor de x_1 e f_1. A solução desse sistema será feita usando o Quadro 1 com as equações completas e usando as operações válidas com as linhas da matriz, como apresentado no Capítulo 2.

1ª operação: Dividir a segunda linha por 2 ($L_2 \leftarrow L_2 / 2$)

Quadro 1A

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	2	3	1	0	12
x_1	1	1/2	0	1/2	4
z	-4	-1	0	0	0

2ª operação: Multiplicar a segunda linha do Quadro 1A por (-2) e somar com a primeira linha do mesmo quadro, colocando o resultado na primeira linha ($L_1 \leftarrow L_1 - 2\ L_2$)

Quadro 1B

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
z	-4	-1	0	0	0

3ª operação: Multiplicar a segunda linha do Quadro 1B por (4) e somar com a terceira linha do mesmo quadro, colocando o resultado na terceira linha ($L_3 \leftarrow L_3 + 4\ L_2$)

Quadro 2

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	0	2	1	-1	4
x_1	1	1/2	0	1/2	4
z	0	1	0	2	16

Como a última linha (função z-transformada) mostra as contribuições líquidas para o lucro, caso as variáveis x_1 e f_2 venha a ter seus valores aumentados de 0 para 1 e como estas contribuições têm seus valores trocados com relação ao quadro original, concluímos que a solução encontrada é ótima.

$x_1 = 4$,

$x_2 = 0$,

$f_1 = 4$,

$f_2 = 0$ e

$z = 16$

4.3 Procedimento do Método Simplex (Problemas de Maximização)

Passo 1: Introduzir as variáveis de folga; uma para cada desigualdade.

Passo 2: Montar um quadro para os cálculos, colocando os coeficientes de todas as variáveis com os respectivos sinais e, na última linha, incluir os coeficientes da função objetivo transformada.

Passo 3: Estabelecer uma solução básica inicial, usualmente atribuindo valor zero às variáveis originais e achando valores positivos para as variáveis de folga.

Passo 4: Como próxima variável a entrar na base, escolher a variável não básica que oferece, na última linha, a maior contribuição para o aumento da função objetivo (ou seja, tem o maior valor negativo). Se todas as variáveis que estão fora da base tiverem coeficientes nulos ou positivos nesta linha, a solução atual é ótima. Se alguma dessas variáveis tiver coeficiente nulo, isto significa que ela pode ser introduzida na base sem aumentar o valor da função objetivo. Isso quer dizer que temos uma solução ótima, com o mesmo valor da função objetivo.

Passo 5: Para escolher a variável que deve deixar a base, deve-se realizar o seguinte procedimento:

a) Dividir os elementos da última coluna pelos correspondentes elementos positivos da coluna da variável que vai entrar na base. caso não haja elemento algum positivo nesta coluna, o processo deve parar, já que a solução seria ilimitada.

b) O menor quociente indica a equação cuja respectiva variável básica deverá ser anulada, tornando-se variável não básica.

Passo 6: Usando operações válidas com as linhas da matriz, transformar o quadro de cálculos de forma a encontrar a nova solução básica. A coluna da nova variável básica deverá se tornar um vetor identidade, onde o elemento 1 aparece na linha correspondente à variável que está sendo anulada.

Passo 7: Retornar ao passo 4 para iniciar outra iteração.

4.4 Outro Exemplo

Vamos resolver pelo método Simplex o problema das rações proposto no Capítulo 1, cujo modelo foi apresentado no Capítulo 3.

maximizar $Z = 11\,x_1 + 12\,x_2$

sujeito a: $x_1 + 4\,x_2 \leq 10000$

$5\,x_1 + 2\,x_2 \leq 30000$

$x_1, x_2 \geq 0$

a) Inclusão das variáveis de folga

Com a inclusão das variáveis de folga, o problema torna-se:

maximizar $Z = 11\,x_1 + 12\,x_2$

sujeito a: $x_1 + 4\,x_2 + f_1 \leq 10000$

$5\,x_1 + 2\,x_2 + f_2 \leq 30000$

$x_1, x_2, f_1, f_2 \geq 0$

b) Solução inicial

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
f_1	1	4	1	0	10000
f_2	5	2	0	1	30000
z	-11	-12	0	0	0

c) Primeira iteração

Variável a entrar na base: x_2 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: f_1 (o quociente 10000/4 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_2, que vai entrar na base)

$L_1 \leftarrow L_1 / 4$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2\ L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + 12\ L_1$

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	1/4	1	1/4	0	2500
f_2	4,5	0	-1/2	1	25000
z	-8	0	3	0	30000

d) Segunda iteração

Variável a entrar na base: x_1 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: f_2 (o quociente 25000/ 4,5 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_1, que vai entrar na base)

$L_2 \leftarrow L_2 / 4{,}5$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 / 4$

$L_3 \leftarrow L_3 + 8\ L_2$

Base	x_1	x_2	f_1	f_2	b
x_2	0	1	0,2778	-0,0556	1111,11
x_1	1	0	-0,1111	0,2222	5555,56
z	0	0	2,1111	1,7778	74444,44

e) Solução ótima encontrada

Como todos os valores da última linha (função z-transformada) são positivos ou nulos, concluímos que a solução encontrada é ótima, ou seja:

$x_1 = 5555{,}55$

$x_2 = 1111{,}11$

$z = 74444{,}44$

4.5 Aspectos Matemáticos Singulares

Na modelagem de um problema de programação linear, algumas situações específicas podem ocorrer, o que pode levar a casos em uma forma matemática diferente da apresentada até o momento. Entretanto, alguns artifícios matemáticos ajudam a reduzir o modelo obtido à forma padrão estudada. Estes artifícios são mostrados a seguir.

4.5.1 Minimização de uma função

A minimização de uma função $z(\mathbf{x})$ é matematicamente análoga à maximização da negativa desta função ($-z(\mathbf{x})$).

Exemplo: minimizar $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$

é equivalente a

maximizar $z' = - c_1 x_1 - c_2 x_2 - \ldots - c_n x_n$

com $z' = - z$.

Essa é uma das formas de se resolver os problemas de minimização utilizando o mesmo algoritmo. Caso que queira resolver diretamente, devemos alterar o critério de entrada das variáveis na base. A variável que entra na base passa a ser aquela que tem o maior valor *positivo* na linha z-transformada. Caso todas tenham coeficientes negativos ou nulos, a solução obtida é ótima.

4.5.2 Restrições de limite inferior (≥)

Uma desigualdade em uma direção (≤ ou ≥) pode ser mudada para uma desigualdade na direção oposta, pela multiplicação de ambos os lados da desigualdade por (-1).

Exemplo: $a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$

é equivalente a

$- a_1 x_1 - a_2 x_2 \leq -b$

4.5.3 Restrições de igualdade

Uma equação pode ser substituída por duas desigualdades de direções opostas.

Exemplo: $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$

é equivalente a duas desigualdades simultâneas:

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$

$a_1 x_1 + a_2 x_2 \geq b$

4.5.4 Variável irrestrita em sinal

Uma variável irrestrita em sinal (ou seja, que pode ser positiva, nula ou negativa) pode ser substituída pela diferença de duas variáveis não negativas.

Exemplo: se a variável x_1 for irrestrita em sinal, pode ser substituída pela diferença $(x'_1 - x''_1)$

com

$x'_1 \geq 0$ e $x''_1 \geq 0$.

4.6 Método Simplex em Duas Fases

O Método Simplex utiliza uma solução inicial viável para começar o processo iterativo, trabalhando sempre dentro da região viável. Nos casos apresentados até o presente momento, a solução $x_i = 0$, para $i = 1, ..., n$ era uma solução viável, já que todas as restrições apresentadas foram do tipo (≤). Quando as restrições são do tipo (=) ou (≥), esta solução não existe.

Seja o exemplo abaixo:

minimizar $z = 10\, x_1 + 4\, x_2 + 5\, x_3$

sujeito a: $8\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 \geq 10$

$4\, x_1 + 3\, x_2 \leq 8$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Como temos uma restrição do tipo (≥), a variável de folga deve ter coeficiente negativo, tendo o significado de uma variável de excesso. O problema transformado é:

minimizar $z = 10\, x_1 + 4\, x_2 + 5\, x_3$

sujeito a: $8\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 - f_1 = 10$

$4\, x_1 + 3\, x_2 + f_2 = 8$

$x_1, x_2, x_3, f_1, f_2 \geq 0$

onde f_1 é uma variável de excesso e f_2 é uma variável de folga.

Note que, pelo processo de solução anterior, a variável de excesso (f_1) passaria a ter valor negativo na solução inicial (-10), o que não é permitido. Assim, a solução $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ é inviável. É necessário então encontrar uma solução viável para que o método Simplex possa ser iniciado.

A forma de se resolver isto é inventando novas variáveis. Estas variáveis são chamadas de *variáveis artificiais*, e representadas por z_i. Será colocada uma variável artificial em cada restrição do modelo, ou seja:

$8\, x_1 + 3\, x_2 + 4\, x_3 - f_1 + z_1 = 10$

$4\, x_1 + 3\, x_2 + f_2 + z_2 = 8$

$x_1, x_2, x_3, f_1, f_2, z_1, z_2 \geq 0$

Como pode-se perceber, o problema com as restrições acima não é o mesmo problema, a não ser que todas as variáveis z_i sejam iguais a zero.

Desta forma, podemos resolver o problema em duas fases: na primeira fase, substituímos a função objetivo original por uma *função objetivo auxiliar*:

$$z_{aux} = - z_1 - z_2 = 12\, x_1 + 6\, x_2 + 4\, x_3 - f_1 + f_2 - 18$$

Nesse momento, aplicamos o método Simplex de forma a maximizar a função objetivo auxiliar, com as restrições contendo as variáveis auxiliares. A função objetivo auxiliar será maximizada quando todas as variáveis z_i forem iguais a zero, já que não podem conter valores negativos.

A primeira fase do problema, que consiste na maximização da função objetivo auxiliar, fornecerá uma solução viável para o problema original. A segunda fase consiste em resolver o problema original tomando como solução inicial os valores obtidos pela primeira fase para as variáveis x_i e f_i.

a) Solução inicial

Para resolver o problema, monta-se o quadro de forma semelhante à sistemática, colocando-se a função objetivo artificial na última linha. O quadro do exemplo fica:

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	z_1	z_2	b
z_1	8	3	4	-1	0	1	0	10
z_2	4	3	0	0	1	0	1	8
$z' = -z$	10	4	5	0	0	0	0	0
z_{aux}	-12	-6	-4	1	-1	0	0	-18

Obs. Como a função objetivo é de minimização, ele foi transformado em um problema de maximização através da multiplicação de todos os coeficientes por (-1).

A seguir, aplica-se o método Simplex normalmente, usando como função objetivo a última linha. Quando a solução ótima for atingida, dois casos podem ocorrer:

$z_{aux} = 0$: neste caso foi obtida uma solução básica do problema original e o processo de solução deve continuar, desprezando-se as variáveis artificiais e os elementos da última linha. É o início da segunda fase do processo.

$z_{aux} \neq 0$: neste caso o problema original não tem solução viável, o que significa que as restrições devem ser inconsistentes.

b) Fase 1 - Primeira iteração

Variável a entrar na base: x_1 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: z_1 (o quociente 10/8 é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_1, que vai entrar na base)

$L_1 \leftarrow L_1 / 8$

$L_2 \leftarrow L_2 - 4\, L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 10\, L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 + 12\, L_1$

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	z_1	z_2	b
x_1	1	3/8	1/2	-1/8	0	1/8	0	5/4
z_2	0	3/2	-2	1/2	1	-1/2	1	3
$z' = -z$	0	1/4	0	5/4	0	-5/4	0	-12,5
z_{aux}	0	-3/2	2	-1/2	-1	3/2	0	-3

c) Fase 1 - Segunda iteração

Variável a entrar na base: x_2 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: z_2 (o quociente 3/(3/2) é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_2, que vai entrar na base)

$L_2 \leftarrow 2\ L_2 / 3$

$L_1 \leftarrow L_1 - 3\ L_2 / 8$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 / 4$

$L_4 \leftarrow L_4 + 3\ L_2 / 2$

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	z_1	z_2	b
x_1	1	0	1	-1/4	-1/4	1/4	-1/4	1/2
x_2	0	1	-4/3	1/3	2/3	-1/3	2/3	2
$z' = -z$	0	0	1/3	7/6	-1/6	-7/6	1/6	-13
z_{aux}	0	0	0	0	0	1	1	0

Como na última linha o valor da função objetivo artificial é zero, a primeira fase terminou e a solução encontrada é a solução básica inicial para a segunda fase.

Removendo a última linha e as colunas referentes às variáveis artificiais, o quadro se torna

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	b
x_1	1	0	1	-1/4	-1/4	1/2
x_2	0	1	-4/3	1/3	2/3	2
$z' = -z$	0	0	1/3	7/6	-1/6	-13

d) Fase 2 - Primeira iteração

Variável a entrar na base: f_2 (coluna com maior valor negativo na última linha)

Variável a sair da base: x_2 (o quociente 2/(2/3) é o menor quociente entre a última coluna e a coluna da variável x_2, que vai entrar na base)

$L_2 \leftarrow 3\ L_2 / 2$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2 / 4$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 / 6$

Base	x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	b
x_1	1	3/8	1/2	-1/8	0	5/4
x_2	0	3/2	-2	1/2	1	3
$z' = -z$	0	1/4	0	5/4	0	-12,5

e) Solução ótima encontrada

Como todos os valores da última linha (função z-transformada) são positivos ou nulos, concluímos que a solução encontrada é ótima, ou seja:

$x_1 = 1,25$

$x_2 = 0$

$z = -z' = 12,5$