CAPÍTULO 6

O PROBLEMA DE TRANSPORTE

Um problema bastante comum que muitas vezes pode ser modelado como um problema de programação linear é o problema de transporte. Este problema envolve o transporte de alguma carga de diversas fontes a diversos pontos de destino. Dados o custo da distribuição entre cada fonte e destino, as produções das fontes e as capacidades dos destinos, pretende-se minimizar o custo total do transporte.

6.1 Um Exemplo de Problema de Transporte

Seja o processo de produção, transporte e depósito apresentado na Figura 6.1,

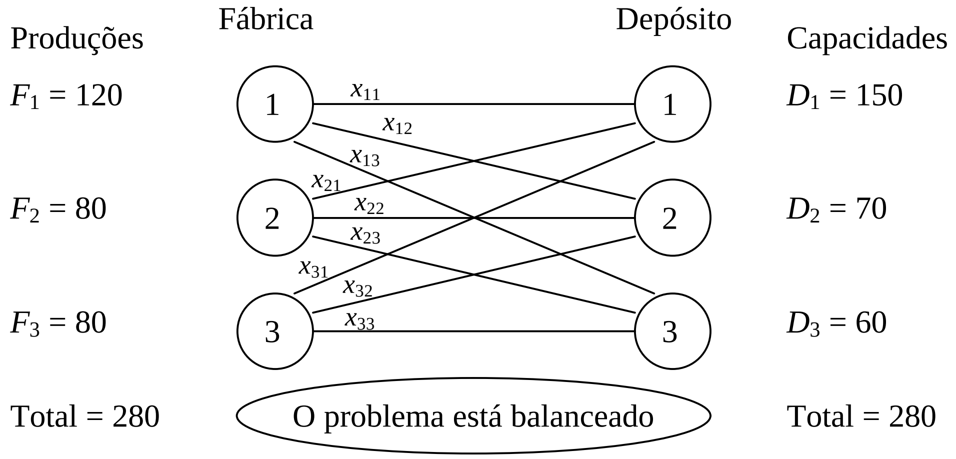

Figura 6.1 - Exemplo de um problema de transporte, com 3 fontes e 3 destinos

onde os custos de transporte c_{ij}, da fonte i para o destino j são apresentados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 - Custos unitários de transporte para o exemplo de problema de transporte

Custos (c_{ij})	**Destinos (j)**		
Fontes (i)	**1**	**2**	**3**
1	8	5	6
2	15	10	12
3	3	9	10

Formulando o problema por programação linear, define-se como objetivo a minimização do custo total de transporte, ou seja:

minimizar: $z = 8\,x_{11} + 5\,x_{12} + 6\,x_{13} + 15\,x_{21} + 10\,x_{22} + 12\,x_{23} + 3\,x_{31} + 9\,x_{32} + 10\,x_{32}$

sujeito a

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 80 \\ x_{31} + x_{32} + x_{32} = 80 \end{array}\right\} \text{restrições de produção}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60 \end{array}\right\} \text{ restrições de capacidade}$$

$x_{ij} \geq 0$ para $i = 1,2,3$ e $j = 1,2,3$ restrições de positividade

A solução do problema se torna mais cômoda se os dados forem representados em um quadro conforme a Figura 6.2.

		Destino 1	Destino 2	Destino 3	Fornecimento
Fonte	1	$\boxed{8}$ x_{11}	$\boxed{5}$ x_{12}	$\boxed{6}$ x_{13}	120
	2	$\boxed{15}$ x_{21}	$\boxed{10}$ x_{22}	$\boxed{12}$ x_{23}	80
	3	$\boxed{3}$ x_{31}	$\boxed{9}$ x_{32}	$\boxed{10}$ x_{33}	80
	Capacidade	150	70	60	

Figura 6.2 - Representação dos dados de um problema de transporte

6.2 Problema Clássico de Transporte

O problema de transporte pode ser apresentado de forma genérica da seguinte forma:

minimizar: $$z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sujeito a $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = F_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = D_j$$

$x_{ij} \geq 0$ para $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$,

onde: c_{ij} = custo de distribuição entre a fonte i e o destino j;

x_{ij} = total a ser distribuído da fonte i até o destino j;

F_i = Total produzido pela fonte i;

D_j = total a ser armazenado pelo destino j.

Para que o problema tenha solução, ele deve estar balanceado, ou seja, devemos ter o total armazenado igual ao total da produção. Isso pode ser definido pela equação

$$\sum_{i=1}^{m} F_i = \sum_{j=1}^{n} D_j \ .$$

O fato de o problema estar balanceado, faz com que uma das restrições seja redundante. Isto significa que o problema se reduzirá a (m + n - 1) restrições e (m x n) variáveis de decisão.

Como se trata de um problema típico de programação linear, ele pode ser resolvido pelo método Simplex. Entretanto, técnicas específicas para este tipo de problema podem resolvê-lo de forma mais rápida que o Simplex.

6.3 Método de Stepping-Stone

O método de stepping-stone chega à solução ótima partindo se uma solução inicial e pesquisando se alguma solução melhor pode ser obtida. Como o método parte de uma solução inicial, devemos encontrar uma solução viável qualquer para poder utilizar o método.

6.3.1 Solução inicial

Vamos utilizar como exemplo o problema apresentado na Seção 6.1. Para encontrar uma solução inicial, será utilizado o método do mínimo custo. Este método consiste nos seguintes passos:

- ✓ Atribuir o máximo possível à variável com menor custo unitário e preenche com zeros a linha ou coluna satisfeita. No exemplo, faz-se x_{31} = 80 já que c_{31} = 3, utilizando completamente o fornecimento da Fonte 3. Desta forma, x_{32} e x_{33} devem ser iguais a 0.
- ✓ Ajustar os elementos da linha ou coluna não ajustada a partir da variável com menor custo. Assim, no exemplo, na primeira coluna temos que fazer x_{11} = 70 (menor custo unitário), de forma a atender a capacidade do Destino 1. Logo, x_{21} deve ser igual a 0.
- ✓ O processo é repetido para as variáveis com outros custos, em ordem crescente. Dessa forma, devemos fazer x_{12} = 50, de forma a completar o fornecimento da Fonte 1, zerando assim a variável x_{13}. Para completar o quadro, devemos definir x_{22} = 20 (capacidade do Destino 2) e x_{23} = 60.

		Destino			
		1	2	3	
Fonte	1	70 $\boxed{8}$	50 $\boxed{5}$	0 $\boxed{6}$	120
	2	0 $\boxed{15}$	20 $\boxed{10}$	60 $\boxed{12}$	80
	3	80 $\boxed{3}$	0 $\boxed{9}$	0 $\boxed{10}$	80
		150	70	60	Fornecimento
		Capacidade			

6.3.2 Processo iterativo

Cada célula vazia representa uma variável não básica que poderia entra na base. Para entrar, a contribuição da variável não básica deve implicar a redução do custo total. Calculando essas contribuições para a célula x_{13}:

- ✓ Aloque 1 unidade a x_{13}. Assim, não é mais 60, mas 61 o total de unidades na coluna 3.
- ✓ Para não violar a restrição da coluna 3, uma unidade deverá ser subtraída de x_{23}, que passa a ter 59 unidades, e a coluna 3 com um total de 60 novamente.
- ✓ Agora a linha 2 totaliza 79 e não 80, o que pode ser corrigido com a adição de uma unidade a x_{22} (20 $\rightarrow$ 21).
- ✓ A coluna 2 fica então com um total de 71, o que pode ser corrigido com a subtração de uma unidade de x_{12}.
- ✓ A linha 1 é automaticamente corrigida em função do passo anterior.

Para cada variável zerada, devemos determinar um caminho fechado de forma a calcular a sua contribuição na função objetivo. Estes caminhos são definidos por linhas verticais ou horizontais, delimitando um polígono fechado. Apenas em um vértice deste polígono deve haver uma variável zerada, que é a própria variável não básica que será incluída na base. Só é possível formar um único caminho com essas características para cada variável zerada.

Encontrado o caminho mínimo da variável, sua contribuição é calculada alternando soma e subtração dos custos unitários dos vértices, começando da variável a ser incluída na base.

Vamos agora calcular a contribuição de cada variável não básica na função objetivo.

Variável	Caminho	Contribuição
x_{13}	$x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12}$	6 - 12 + 10 - 5 = -1
x_{21}	$x_{21} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11}$	15 - 10 + 5 - 8 = 2
x_{32}	$x_{32} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	9 - 5 + 8 - 3 = 9
x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	10 - 12 + 10 - 5 + 8 - 3 = 8

Como é um problema de minimização, a variável a entrar na base será aquela que contribui com o maior redução no valor da função objetivo, que é a variável x_{13}. O valor a ser alocado a esta célula deve ser o máximo, de modo que nenhuma das variáveis fique com valor negativo. Este valor é o menor valor das variáveis que estão nos vértices do caminho mínimo com sinal negativo. No caso, as variáveis com sinal negativo são x_{12} e x_{23}. Logo, o valor a ser alocado é 50.

As demais variáveis vão adicionar ou subtrair 50, conforme o sinal do vértice correspondente à variável seja positivo ou negativo. Ou seja, as variáveis passarão a ter os seguintes valores:

$x_{13} = 0 + 50 = 50;$

$x_{23} = 60 - 50 = 10;$

$x_{22} = 20 + 50 = 70;$

$x_{12} = 50 - 50 = 0.$

Logo, a variável que sai da base é x_{12}. A seguir, é apresentado o quadro após a primeira iteração.

	Destino 1	Destino 2	Destino 3	Fornecimento
Fonte 1	8 70	5 0	6 50	120
Fonte 2	15 0	10 70	12 10	80
Fonte 3	3 80	9 0	10 0	80
Capacidade	150	70	60	

Recalculando as contribuições de cada variável não básica na função objetivo, temos que

Variável	Caminho	Contribuição
x_{12}	$x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{22}$	5 - 6 + 12 - 10 = 1
x_{21}	$x_{21} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11}$	15 - 12 + 6 - 8 = 1
x_{32}	$x_{32} \rightarrow x_{22} \rightarrow x_{23} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	9 - 10 + 12 - 6 + 8 - 3 = 10
x_{33}	$x_{33} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{31}$	10 - 6 + 8 - 3 = 9

Como todas as variáveis têm contribuição positiva, isto indica que a inclusão de qualquer uma delas fará aumentar o valor da função objetivo, portanto a solução encontrada é ótima.

6.4 Dificuldades do Problema de Transporte

6.4.1 Não balanceamento entre oferta e demanda

Caso isso ocorra, o problema não pode ser resolvido da maneira apresentada. Deve-se então criar uma origem ou destino fictício para que o problema esteja balanceado.

Para o problema inicial, se a produção total for maior que a capacidade total, criar um depósito fictício com capacidade = produção total - capacidade total, com custos de distribuição nulos. Se a produção total for menor que a capacidade total, criar uma fábrica fictícia.

Outra maneira de se resolver o problema seria tratar as restrições pertinentes não mais como equações e sim como inequações.

6.4.2 Soluções múltiplas

Ocorrem quando, detectada a solução ótima, um dos valores das contribuições for zero. O caminho fechado para a variável x_{ij} correspondente indicará a forma de obtenção da solução alternativa.