CAPÍTULO 8

TEORIA DOS JOGOS

8.1 Introdução

Um jogo representa uma situação de competição ou conflito entre dois ou mais oponentes. Estes oponentes são usualmente chamados de *jogadores* (um jogador pode ser um time composto de mais de uma pessoa, como num jogo de cartas de duplas - buraco por exemplo - onde apesar de haver quatro pessoas, há apenas dois jogadores). Alguns exemplos de jogos são:

- ✓ jogos de salão, como cara-e-coroa, jogo da velha, damas ou xadrez;
- ✓ competição econômica;
- ✓ conflitos militares ou guerras.

Cada jogador tem um certo número de escolhas, finito ou infinito, chamadas de *estratégias*. Um jogador supostamente escolhe sua estratégia sem qualquer conhecimento prévio da estratégia escolhida pelos outros jogadores. A partir das escolhas dos jogadores, o jogo fornece o resultado, ou *saída*, definindo quanto cada jogador ganhou ou perdeu. Cada jogador faz sua escolha de modo a otimizar o resultado.

Os jogos são categorizados da seguinte maneira:

1. Tipos de saída

   a) Determinada - as saídas são precisamente definidas, dadas as estratégias tomadas.

   b) Probabilística - as probabilidades das diferentes saídas são conhecidas, dadas as estratégias tomadas.

   c) Indeterminada - as saídas possíveis são conhecidas dadas as estratégias tomadas, mas não suas probabilidades.

2. Número de jogadores

   a) Um jogador - estes jogos são chamados de jogos contra a natureza. Se a estratégia da natureza é determinada, o jogo é trivial; se a estratégia da natureza é probabilística, estes jogos são chamados de problemas de decisão; se é indeterminada, pode-se tratar o jogo como sendo de duas pessoas se for atribuída alguma perversidade à natureza.

   b) Dois jogadores.

   c) *n* jogadores (*n* maior que 2).

3. Natureza dos pagamentos

   a) Soma zero - a soma de todos os pagamentos é zero.

   b) Soma constante - a soma de todos os pagamentos é constante e diferente de zero.

   c) Soma variável - não há nenhuma relação entre os pagamentos dos jogadores.

4. Natureza da informação

a) Informação perfeita - conhecimento total de todos os movimentos anteriores.

b) Informação imperfeita.

8.2 Jogos de Dois Jogadores e Soma Zero

Dois jogadores e soma zero é o tipo de jogo mais estudado pela teoria dos jogos. De modo simplificado, neste tipo de jogo cada um dos dois jogadores escolhe uma entre suas estratégias possíveis. Uma vez que ambos os jogadores tenham tomado suas decisões, elas são anunciadas e uma tabela de pagamentos (conhecida anteriormente pelos dois jogadores) é utilizada para determinar o pagamento de um jogador ao outro.

A matriz abaixo representa o jogo. Nesta notação, a matriz representa o pagamento do jogador Y para o jogador X. Se o valor for negativo, o pagamento se dará do jogador X para o jogador Y.

		Y				
		D	E	F	G	Mínimos
	A	8	2	9	5	2
X	B	6	5	7	8	5
	C	7	3	-4	7	-4
Máximos		8	5	9	8	

O jogador X pode escolher entre as estratégias A, B e C. O jogador Y pode escolher entre D, E, F e G. O valor da matriz representa o valor a ser pago ao jogador X. Como é um jogo de duas pessoas e soma zero, um ganho do jogador X implica uma igual perda do jogador Y. Isto significa que se o jogador X escolher a estratégia A e o jogador Y escolher a estratégia G, o jogador X ganhará 9, ao passo que o jogador Y perderá os mesmos 9. Se o pagamento for negativo (por exemplo –4), o jogador X ganhará -4, ou seja, perderá 4, ao passo que o jogador Y ganhará 4.

Quando o jogador X escolhe a estratégia A, ele pode ganhar 8, 2, 9 ou 5, dependendo da estratégia escolhida pelo jogador Y. Ele pode garantir, entretanto, um ganho de pelo menos min{8, 2, 9, 5} = 2, independente da escolha do jogador Y. Da mesma maneira, se ele escolher a estratégia B, ele garante um ganho de min{6, 5, 7, 8} = 5 e se escolher a estratégia C, a pior hipótese é min{7, 3, -4, 7} = -4. Estes valores estão indicados à direita da matriz, chamados de mínimos. Se o jogador X selecionar a estratégia B, ele está maximizando seu menor ganho, dado por max{2, 5, -4} = 5. Esta seleção é denominada *maximin*, já que maximiza o mínimo ganho de cada opção. O valor resultante desta estratégia é chamado *valor maximin*.

O jogador Y, do outro lado, deseja minimizar suas perdas. Ele percebe que, se usar a estratégia D, não pode perder mais do que max{8, 6, 7} = 8. Para as demais estratégias, as máximas perdas estão apresentadas na matriz, como sendo o valor máximo de cada coluna. O jogador Y irá então escolher a alternativa que minimize sua máxima perda, que é a estratégia E, uma vez que min{8, 5, 9, 8} = 5. Esta seleção é denominada minimax, já que minimiza a máxima perda de cada opção. O valor resultante desta estratégia é chamado *valor minimax*.

Percebe-se que, para qualquer jogo de duas pessoas e soma zero, o valor minimax é sempre maior ou igual ao valor maximin. No caso de igualdade, as estratégias são chamadas estratégias ótimas e o jogo tem um ponto de sela. Este ponto é o ponto ótimo do jogo, e é igual ao valor maximin e ao valor minimax. O ponto é otimo, já que nenhum jogador mudará sua estratégia, uma vez que o resultado será pior caso o outro jogador mantenha a estratégia.

Em geral, o valor do jogo deve satisfazer a inequação

valor maximin ≤ valor do jogo ≤ valor minimax.

8.3 Estratégias Mistas

Na seção anterior, foi apresentado um jogo que continha um ponto de sela. Há casos, entretanto, nos quais este ponto de sela não existe. Como exemplo, é apresentada a matriz abaixo.

		Y: C	D	E	F	Mínimos
	A	2	1	2	0	0
X	B	-1	0	3	2	-1
Máximos		2	1	3	2	

Este jogo não possui um ponto de sela, e a estratégia minimax-maximin não é a estratégia ótima, uma vez que os jogadores podem melhorar seus resultados selecionando uma estratégia diferente. Neste caso, o jogo é *instável*.

Olhando para este jogo, percebe-se que algum tipo de troca de estratégias se faz necessária. Se X escolher entre as alternativas A e B de maneira sistemática (por exemplo, alternando entre A e B), esta troca sistemática será detectada pelo jogador Y. Então Y escolherá F quando X escolher A e C quando X escolher B. Um argumento similar serve para Y. Portanto, a variação da escolha entre as alternativas deve ter alguma aleatoriedade associada a ela. Suponhamos que o jogador X jogue uma moeda para saber se escolhe a alternativa A ou B. Chamaremos de p_A a probabilidade de escolher A e de p_B a probabilidade de escolher B. Os pagamentos esperados para uma estratégia aleatória são os seguintes:

C	D	E	F
$2\, p_A - p_B$	p_A	$2\, p_A + 3\, p_B$	$2\, p_B$

Ao jogar uma moeda, as probabilidades p_A e p_B são iguais, e valem 0,5. Neste caso, os pagamentos esperados são:

C	D	E	F
0,5	0,5	2,5	1,0

Entretanto, pode-se escolher uma estratégia que defina as probabilidades de modo a otimizar o resultado. Suponhamos que o jogador X deseje maximizar o menor pagamento vindo de Y. Designando este pagamento por u, o problema pode ser modelado como:

maximizar u

sujeito a $2\, p_A - p_B \leq u$

$p_A \leq u$

$2\, p_A + 3\, p_B \leq u$

$2\, p_B \leq u$

$p_A + p_B = 1$

$p_A, p_B \geq 0$

É conveniente rearrumar o modelo de modo a ter todas as variáveis do lado esquerdo das equações e inequações, ou seja:

maximizar u

sujeito a $2\ p_A - p_B - u \leq 0$

$p_A - u \leq 0$

$2\ p_A + 3\ p_B - u \leq 0$

$2\ p_B - u \leq 0$

$p_A + p_B = 1$

$p_A, p_B \geq 0$

u irrestrito em sinal.

Em contrapartida, o jogador Y deseja variar entre suas alternativas de modo a minimizar o maior pagamento ao jogador X. As probabilidades da esclha das alternativas C, D, E e F são, respectivamente, q_C, q_D, q_E e q_F. Designando o pagamento ao jogador X por v, o problema pode ser modelado como:

minimizar v

sujeito a $2\ q_C + q_D + 2\ q_E \leq v$

$- q_C + 3\ q_E + 2\ q_F \leq \text{v}$

$q_C + q_D + q_E + q_F = 1$

$q_C, q_D, q_E, q_F \geq 0$

O modelo pode ser rearrumado da mesma forma que o modelo referente ao jogador X.

Desta forma, ao serem definidas as probabilidades de cada alternativa, o jogador deve selecioná-las seguindo esta probabilidade, de modo aleatório, para que sua estratégia não seja detectada pelo outro jogador.