

CAPÍTULO 3

FORMULAÇÃO CONTÍNUA DO PROBLEMA

3.1 Problema Original de Múltiplas Escalas

A Figura 3.1 mostra um exemplo de um meio poroso fibroso, composto de duas fases: uma fase contínua, Ω_c , que é o fluido em escoamento, e uma fase dispersa, composta de fibras cilíndricas circulares paralelas, de diâmetro d . O fluido é newtoniano, com densidade \mathbf{r} e viscosidade \mathbf{m} constantes. As fibras que compõem a fase dispersa são sólidas e impermeáveis. O fluido em questão escoar paralelamente ao feixe de fibras, na direção do qual não há força de corpo. O escoamento é laminar, totalmente desenvolvido e em regime permanente.

As sub-regiões do contorno externo do meio podem ser paredes \mathbf{G}_p e seções a montante e a jusante, onde as pressões constantes p_{mon} e p_{jus} são mantidas, respectivamente. O fluido escoar devido à diferença entre as pressões a montante e a jusante.

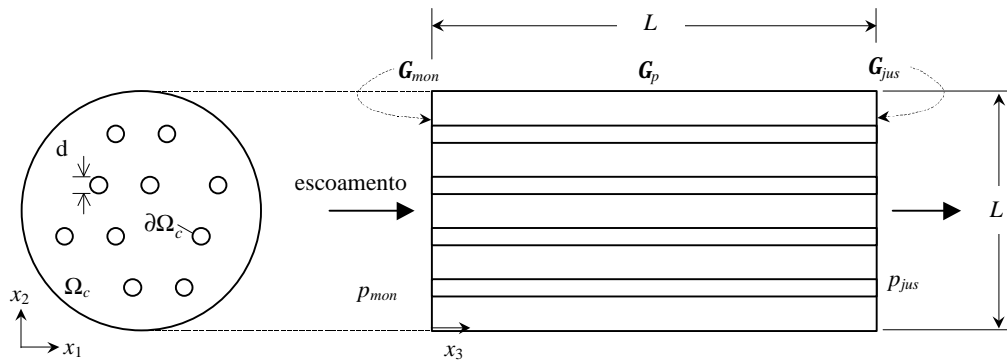


Figura 3.1 - Exemplo de um meio poroso fibroso.

Neste exemplo, assim como em diversos outros casos que envolvem materiais heterogêneos, a força que governa o problema atua numa escala muito maior que a microescala de poros, grãos ou fibras. Estes materiais muitas vezes possuem uma microescala com características bastante complexas, sendo praticamente impossível descrevê-los matematicamente (MEI & AURIAULT, 1989). Entretanto, na maior parte dos casos de engenharia, é suficiente se conhecer as propriedades físicas efetivas do meio, como a condutividade térmica ou elétrica, o módulo de elasticidade ou a permeabilidade.

Diversos estudos foram realizados com o objetivo de substituir o meio heterogêneo por um meio homogêneo com propriedades físicas efetivas de modo a se obter o mesmo comportamento macroscópico. Este processo é chamado de *homogeneização*, e seu desenvolvimento teve início quando se percebeu que o problema no meio heterogêneo poderia ser modelado por problemas desacoplados em meios de escalas diferentes (AURIAULT, 1991). Ainda assim, a maior escala de periodicidade estrutural é bem menor que a escala onde atuam as forças governantes do problema (MEI & AURIAULT, 1989). Casos como este são conhecidos como *Problemas de Múltiplas Escalas*. Na Figura 3.1, percebe-se duas escalas distintas bem definidas: o tamanho do meio poroso, L ; e o diâmetro das fibras, d , que são, respectivamente, a macro e a microescala.

No escoamento estudado nesta tese, a força que governa o problema é aquela originária da diferença de pressões a montante e a jusante. A grandeza física de interesse é a vazão volumétrica que atravessa o meio poroso para uma determinada diferença de pressões imposta. Para a sua determinação, é necessário se integrar o complicado campo de velocidade local; a permeabilidade do meio na direção longitudinal, \mathbf{k} , é definida pela Lei de Darcy (Capítulo 2):

$$\langle \mathbf{u}_{orig} \rangle = -\frac{1}{m} \mathbf{k} \langle \nabla p_{orig} \rangle, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{u}_{orig} é a velocidade local do fluido, ∇p_{orig} é o gradiente de pressão local e $\langle \rangle$ denota na média volumétrica.

As equações governantes do problema são as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento linear, respectivamente

$$\frac{\partial u_{orig,i}}{\partial x_i} = 0 \text{ em } \Omega_c \quad (3.2)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mathbf{m} \frac{\partial u_{orig,i}}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial p_{orig}}{\partial x_i} \text{ em } \Omega_c. \quad (3.3)$$

As condições de contorno são de impenetrabilidade (velocidade normal nula) e de escorregamento nulo nas paredes e nas superfícies das fibras, ou seja,

$$u_{orig,i} = 0 \text{ em } \mathbf{G}_p \quad (3.4)$$

e

$$u_{orig,i} = 0 \text{ em } \partial\Omega_c. \quad (3.5)$$

As Equações (3.2) e (3.3), em virtude do escoamento ser somente na direção longitudinal, tornam-se

$$\frac{\partial u_{orig,3}}{\partial x_3} = 0 \text{ em } \Omega_c \quad (3.6)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mathbf{m} \frac{\partial u_{orig,3}}{\partial x_j} \right] = \frac{dp_{orig}}{dx_3} \text{ em } \Omega_c. \quad (3.7)$$

Como o escoamento é totalmente desenvolvido, a equação de conservação de massa (3.6) é identicamente satisfeita. Além disso, o gradiente de pressões pode ser definido como

$$\frac{dp_{orig}}{dx_3} = -\frac{\Delta p}{L}, \quad (3.8)$$

onde

$$\Delta p = p_{mon} - p_{jus} \quad (3.9)$$

(p_{mon} e p_{jus} estão indicados na Figura 3.1). A Equação (3.7) torna-se então

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mathbf{m} \frac{\partial u_{orig,3}}{\partial x_j} \right] = -\frac{\Delta p}{L} \text{ em } \Omega_c, j = 1, 2. \quad (3.10)$$

3.2 Homogeneização

Em termos gerais, o método da homogeneização (BENSOUSSAN, LIONS & PAPANICOLAOU, 1978; AURIAULT, 1991) emprega média volumétrica para a obtenção de um modelo tipo mistura (ISHII, 1975) matematicamente rigoroso, para um meio heterogêneo contendo microestrutura periódica. Uma definição formal pode ser oferecida introduzindo-se três tipos de problemas de valor de contorno (PVC), como a seguir.

PVC-1

$$\left\{ \begin{array}{l} A^\epsilon u_\epsilon = f \text{ em } \Omega \\ u_\epsilon \text{ sujeito a condições de contorno em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.11a) \\ (3.11b) \end{array}$$

Em (3.11a), o domínio Ω é uma região em \mathbb{R}^n aberta, $\partial\Omega$ é a superfície do contorno de Ω em \mathbb{R}^{n-1} , A^ϵ é um operador diferencial parcial com variação periódica e coeficientes contínuos, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, é o termo fonte e u_ϵ está sujeito a condições de contorno de Dirichlet e/ou Neumann em (3.11b). As escalas de comprimento do domínio Ω e dos períodos são, respectivamente, L e I ; o parâmetro positivo ϵ é a razão destas escalas, e é suposto pequeno,

$$\epsilon \equiv \frac{I}{L} \ll 1. \quad (3.12)$$

O problema de valor de contorno PVC-1 é dito como possuindo coeficientes que oscilam rapidamente.

PVC-2

$$\left\{ \begin{array}{l} A^H u_H = f \text{ em } \Omega \\ u_H \text{ sujeito a condições de contorno em } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.13a) \\ (3.13b) \end{array}$$

O operador diferencial parcial A^H possui coeficientes constantes, ou seja, A^H é um operador homogêneo. Este problema de valor de contorno é

conhecido como homogeneizado. As condições de contorno aplicadas a u_H em (3.13b) são as mesmas aplicadas a u_e em (3.11b).

PVC-3

$$\left\{ \begin{array}{l} A^c u_c = f^c \text{ em } \Omega^c \\ u^c \text{ sujeito a condições de contorno em } \partial\Omega^c \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.14a) \\ (3.14b) \end{array}$$

O domínio Ω^c , uma região em \mathbb{R}^n aberta, é uma célula periódica de comprimento característico I , ou seja, com dimensões proporcionais a I em todas as n direções coordenadas. O operador diferencial parcial A^c pode possuir coeficientes constantes ou variáveis em Ω^c , e as funções u_c e f^c são periódicas em I , ou seja, são funções que admitem períodos $C_j I$, $C_j \in \mathbb{R}$, na direção x_j , $j = 1, \dots, n$. Este problema de valor de contorno é chamado problema da célula.

Uma definição formal do método é então apresentada em CRUZ (1997): “o método da homogeneização é uma técnica matemática rigorosa por meio da qual pode-se substituir, no limite $e \rightarrow 0$, um problema de valor de contorno com coeficientes variando rapidamente (tipo PVC-1), por um problema homogeneizado (tipo PVC-2), cujos coeficientes são determinados pela solução de um problema da célula (tipo PVC-3)”. Apesar dos três problemas serem, em geral, difíceis de se resolver analiticamente, o método da homogeneização tem a vantagem de que problemas dos tipos PVC-3 e PVC-2 são muito mais fáceis de se resolver do que um problema do tipo PVC-1, uma vez que este requer não somente $O(1/e^n)$ graus de liberdade a mais, mas também é muito mais rígido por possuir escalas muito diferentes (CRUZ, 1997).

A elaboração de um modelo matemático para descrever um fenômeno físico é um caso típico da investigação científica. Frequentemente, este modelo leva a um problema do tipo PVC-1, particularmente quando se está trabalhando com sistemas heterogêneos. A teoria da homogeneização pode ser empregada para se resolver este modelo. Com o objetivo de substituir o operador A^e do PVC-1 pelo operador A^H do PVC-2, diversas técnicas matemáticas podem ser utilizadas, como descrito em BENSOUSSAN, LIONS & PAPANICOLAOU (1978). Nessa tese, será utilizada a expansão assintótica com múltiplas escalas: a escala rápida, proporcional a I ; e a escala lenta, proporcional a L .

O método da expansão assintótica é atrativo para problemas do tipo PVC-1 onde há uma separação natural das escalas de comprimento. O procedimento é então olhar para a solução $u_e = u_e(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, do problema PVC-1 na forma de uma expansão assintótica em termos do parâmetro positivo e :

$$u_e = u_0 + e u_1 + e^2 u_2 + \dots, \quad (3.15)$$

onde as funções u_j , $j = 1, \dots$, são agora as novas incógnitas, tendo todas a mesma ordem de magnitude. Inserindo a equação (3.15) em (3.11a) e (3.11b), e agrupando iguais potências de e , um problema do tipo PVC-2 é obtido para u_0 , com condições de contorno dependentes daquelas prescritas para o problema original. O resultado principal do método, mostrado em BENSOUSSAN, LIONS & PAPANICOLAOU (1978), é que u_e converge (em métricas apropriadas) para u_0 quando $e \rightarrow 0$. A construção analítica explícita do operador homogêneo A^H é crucial para se resolver o problema e requer a solução de um problema da célula periódica (tipo PVC-3). A solução do problema da célula permite a determinação dos coeficientes apropriados de A^H . Em geral, os problemas homogeneizado e da célula têm que ser resolvidos numericamente.

3.3 Aplicação da Teoria da Homogeneização ao Problema Original

Nesta seção, o método da homogeneização é aplicado ao problema original. Uma formulação variacional do problema original é vantajosa no desenvolvimento da homogeneização, para posterior aplicação do método dos elementos finitos. É considerado o espaço de funções $X(\Omega_c) = \{w \in H_0^1(\Omega_c)\}$, contendo todas as funções que se anulam nos contornos sólidos de Ω_c , onde as condições de contorno de Dirichlet são aplicadas, e podem ser quadrado-integradas em Ω_c (ADAMS, 1975), bem como suas derivadas.

No processo de homogeneização, deve ser levado em conta o fato de que as forças de pressão (lado direito da Equação (3.10)) são exercidas na macroescala (proporcional a L^2), enquanto as forças viscosas (lado esquerdo) são provenientes do arrasto sobre as fibras e ocorrem na mesoescala (proporcional a l^2). Para a aplicação da teoria da homogeneização ao problema, são introduzidas as seguintes grandezas normalizadas:

$$u^* = \frac{u_{orig,3}}{U}, \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{x}}{L}, \quad (3.16b)$$

$$\mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{x}}{l} = \frac{\mathbf{x}^*}{e}, \quad (3.16c)$$

$$p^* = \frac{p}{\Delta p}, \quad (3.16d)$$

onde

$$U = \frac{\Delta p I^2}{mL} \quad (3.16e)$$

e Δp é dado pela Equação (3.8). A equação (3.10), com a introdução das variáveis normalizadas (3.16a), (3.16b), (3.16c) e (3.16d), torna-se

$$\mathbf{e}^2 \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} \right] = -1 \text{ em } \Omega_c, j = 1, 2. \quad (3.17)$$

Multiplicando-se a equação (3.17) por $v \in X(\Omega_c)$, e integrando a equação resultante em Ω_c , chega-se a

$$\mathbf{e}^2 \int_{\Omega_c} v \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left[\frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} \right] d\mathbf{x}^* = - \int_{\Omega_c} v d\mathbf{x}^* \quad \forall v \in X(\Omega_c). \quad (3.18)$$

Reescrevendo o lado esquerdo da equação (3.18), obtém-se

$$-\mathbf{e}^2 \int_{\Omega_c} \frac{\partial v}{\partial x_j^*} \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} d\mathbf{x}^* + \mathbf{e}^2 \int_{\Omega_c} \frac{\partial}{\partial x_j^*} \left(v \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} \right) d\mathbf{x}^* = - \int_{\Omega_c} v d\mathbf{x}^* \quad \forall v \in X(\Omega_c). \quad (3.19)$$

Aplicando ao segundo termo da Equação (3.19) o teorema da divergência (SLATTERY, 1972; HILDEBRAND, 1976), tem-se que

$$\begin{aligned} & -\mathbf{e}^2 \int_{\Omega_c} \frac{\partial v}{\partial x_j^*} \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} d\mathbf{x}^* + \mathbf{e}^2 \int_{G_p} v \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} n_j ds + \mathbf{e}^2 \int_{G_{mon}} v \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} n_j ds + \mathbf{e}^2 \int_{G_{jus}} v \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} n_j ds + \\ & + \mathbf{e}^2 \int_{\partial\Omega_c} v \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} n_j ds = - \int_{\Omega_c} v d\mathbf{x}^* \quad \forall v \in X(\Omega_c). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Como v se anula nos limites de Ω_c onde há a condição de contorno de Dirichlet, as integrais em $\partial\Omega_c$ e \mathbf{G}_p são então nulas. O mesmo ocorre com as integrais em \mathbf{G}_{mon} e \mathbf{G}_{jus} , visto que em ambos os casos o gradiente da velocidade é ortogonal ao vetor n_j . Portanto,

$$-\mathbf{e}^2 \int_{\Omega_c} \frac{\partial v}{\partial x_j^*} \frac{\partial u^*}{\partial x_j^*} d\mathbf{x}^* = - \int_{\Omega_c} v d\mathbf{x}^* \quad \forall v \in X(\Omega_c). \quad (3.21)$$

São introduzidas agora as expansões assintóticas de múltiplas escalas (BENSOUSSAN, LIONS & PAPNICOLAOU, 1978; AURIAULT, 1991),

$$u^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = u_0^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \mathbf{e} u_1^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \mathbf{e}^2 u_2^*(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + O(\mathbf{e}^3), \quad (3.22)$$

$$v(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = v_0(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \mathbf{e} v_1(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + \mathbf{e}^2 v_2(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) + O(\mathbf{e}^3). \quad (3.23)$$

Deve-se notar que é necessário cuidado com o operador $\frac{\partial}{\partial x_j^*}$ aplicado a uma função do tipo

$$F = \hat{F}(\mathbf{x}^*) = \tilde{F}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*); \quad (3.24)$$

deve-se inicialmente tratar \mathbf{x}^* e \mathbf{y}^* como variáveis independentes e, subseqüentemente, substituir \mathbf{y}^* por \mathbf{x}^*/\mathbf{e} para se obter

$$\frac{\partial}{\partial x_j^*} [F] = \frac{\partial \hat{F}}{\partial x_j^*} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_j^*} + \frac{1}{\mathbf{e}} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y_j^*}. \quad (3.25)$$

Se F for expandida como $F = F_0 + \mathbf{e} F_1 + \mathbf{e}^2 F_2 + O(\mathbf{e}^3)$, então de (3.25),

$$\frac{\partial}{\partial x_j^*} [F] = \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial x_j^*} + \frac{1}{\mathbf{e}} \frac{\partial \tilde{F}_0}{\partial y_j^*} + \mathbf{e} \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial x_j^*} + \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial y_j^*} + \mathbf{e}^2 \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial x_j^*} + \mathbf{e} \frac{\partial \tilde{F}_2}{\partial y_j^*} + O(\mathbf{e}^2). \quad (3.26)$$

Combinando as equações (3.21), (3.22), (3.23) e (3.26), e retendo-se apenas termos de ordem até \mathbf{e}^3 , tem-se

$$\begin{aligned} -\mathbf{e}^2 \int_{\Omega_c} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x_j^*} + \frac{1}{\mathbf{e}} \frac{\partial v_0}{\partial y_j^*} + \mathbf{e} \frac{\partial v_1}{\partial x_j^*} + \frac{\partial v_1}{\partial y_j^*} + \mathbf{e} \frac{\partial v_2}{\partial y_j^*} \right) \left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x_j^*} + \frac{1}{\mathbf{e}} \frac{\partial u_0^*}{\partial y_j^*} + \mathbf{e} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_1^*}{\partial y_j^*} + \right. \\ \left. + \mathbf{e} \frac{\partial u_2^*}{\partial y_j^*} \right) d\mathbf{x}^* = - \int_{\Omega_c} (v_0 + \mathbf{e} v_1 + \mathbf{e}^2 v_2) d\mathbf{x}^* \quad \forall v_0, v_1, v_2 \in X(\Omega_c). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Agrupando os termos em \mathbf{e}^0 da Equação (3.27) obtém-se

$$- \int_{\Omega_c} \frac{\partial v_0}{\partial y_j^*} \frac{\partial u_0^*}{\partial y_j^*} d\mathbf{x}^* = - \int_{\Omega_c} v_0 d\mathbf{x}^* \quad \forall v_0 \in X(\Omega_c). \quad (3.28)$$

Para a formulação do problema da célula, será considerado que a dependência funcional de u_0^* pode ser separada nas variáveis \mathbf{x}^* e \mathbf{y}^* , ou seja (AURIAULT & ADLER, 1995),

$$u_0^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\Psi(\mathbf{y}) \cdot [-1(\mathbf{x})]. \quad (3.29)$$

Aplicando a Equação (3.29) em (3.28), chega-se a

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial v_0}{\partial y_j^*} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j^*} d\mathbf{x}^* = \int_{\Omega_c} v_0 d\mathbf{x}^* \quad \forall v_0 \in X(\Omega_c). \quad (3.30)$$

A equação (3.30) pode agora ser transformada para uma célula periódica utilizando-se a propriedade de periodicidade, provada em KELLER (1980) e apresentada em CRUZ (1997):

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{|\Omega_{cp}|} \left[\int_{\Omega_{cp}} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{x}, \quad (3.31)$$

onde $|\Omega_{cp}| \equiv \int_{\Omega_{cp}} d\mathbf{y}$ é a medida do volume total da célula periódica (cp). A Equação (3.31) indica que, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a integração de uma função f em Ω pode ser calculada como a integral das médias de f nos períodos que compõem o meio. A célula periódica se torna apenas um ponto na macroescala. Aplicando a propriedade de periodicidade em (3.30), obtém-se

$$\int_{\Omega_c} \frac{1}{|\Omega_{cp}|} \left[\int_{\Omega_{cp}} \frac{\partial v_0}{\partial y_j^*} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j^*} d\mathbf{y}^* \right] d\mathbf{x}^* = \int_{\Omega_c} \frac{1}{|\Omega_{cp}|} \left[\int_{\Omega_{cp}} v_0 d\mathbf{y}^* \right] d\mathbf{x}^* \quad \forall v_0 \in X(\Omega_c). \quad (3.32)$$

Como as integrais são equivalentes para qualquer v_0 em $X(\Omega_c)$, é válida a igualdade entre os termos integrandos, logo

$$\int_{\Omega_{cp}} \frac{\partial v}{\partial y_j^*} \frac{\partial \Psi}{\partial y_j^*} d\mathbf{y}^* = \int_{\Omega_{cp}} v d\mathbf{y}^* \quad \forall v \in Y(\Omega_{cp}). \quad (3.33)$$

onde $Y(\Omega_{cp})$ é o espaço de todas as funções *periódicas* em λ em ambas as direções e com valor nulo no contorno das fibras. A Equação (3.33) é o *problema da célula*, que é resolvido nessa tese numericamente pelo Método dos Elementos Finitos (Capítulo 4).

Sendo agora Ψ conhecida no domínio da célula periódica, pode-se calcular a permeabilidade. Da equação de Darcy, tem-se que

$$u_0 = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{\Delta p}{L}. \quad (3.34)$$

Integrando a Equação (3.34) em Ω_{cp} , lembrando que \mathbf{k} , \mathbf{m} e $\frac{\Delta p}{L}$ não variam ao longo do domínio da mesoescala, tem-se que

$$\int_{\Omega_{cp}} u_0 \, d\mathbf{y} = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{\Delta p}{L} |\Omega_{cp}|. \quad (3.35)$$

Como u_0 pode ser determinado a partir de Ψ , aplicando (3.29) em (3.35) e inserindo as grandezas normalizadas (3.16a), (3.16b), (3.16c) e (3.16d), chega-se à fórmula final para o cálculo da permeabilidade,

$$\mathbf{k} = \frac{1}{|\Omega_{cp}|} \int_{\Omega_{cp}} \Psi \, d\mathbf{y}^*. \quad (3.36)$$

3.4 Macroescala

A grandeza física de interesse no problema da macroescala é a vazão volumétrica do fluido através do meio, para uma dada diferença de pressão imposta. Da equação de conservação de massa,

$$\frac{\partial u_{ma,i}}{\partial x_i} = 0, \quad (3.37)$$

e da Lei de Darcy,

$$u_{ma,i} = -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{\partial p_{ma}}{\partial x_i}, \quad (3.38)$$

se obtém a equação do escoamento laminar totalmente desenvolvido,

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{\partial p_{ma}}{\partial x_i} \right] = 0 \text{ em } \Omega_{ma}. \quad (3.39)$$

Em (3.39), a permeabilidade $\mathbf{k} = \mathbf{k}(c(\mathbf{x}))$ é uma função da concentração c , que pode variar ao longo da macroescala. As condições de contorno para este problema são

$$p_{ma} = p_{mon} \text{ em } \mathbf{G}_{mon}, \quad (3.40)$$

$$p_{ma} = p_{jus} \text{ em } \mathbf{G}_{jus}, \quad (3.41)$$

$$-\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{\partial p_{ma}}{\partial x_3} = u_3 = 0 \text{ em } \mathbf{G}_p. \quad (3.42)$$

Resolvendo para p_{ma} , a vazão volumétrica pode ser calculada integrando-se a velocidade na área de escoamento, ou seja,

$$Q = \int_{\mathbf{G}_{jus}} u_{ma,i} n_i ds, \quad (3.43)$$

onde n_i é um vetor normal à área de escoamento infinitesimal, ds . Da Equação de Darcy, chega-se à forma final da equação a ser resolvida no problema da macroescala:

$$Q = \int_{\mathbf{G}_{jus}} -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{\partial p_{ma}}{\partial x_i} n_i ds = \int_{\mathbf{G}_{jus}} -\frac{\mathbf{k}}{\mathbf{m}} \frac{dp_{ma}}{dx_3} n_3 ds. \quad (3.44)$$

É importante ressaltar que essa tese não se propõe a resolver o problema da macroescala. É solucionado apenas o problema da mesoescala, fornecendo valores da permeabilidade efetiva em função da concentração. A partir destes valores, tem-se subsídios para a determinação da vazão volumétrica.

3.5 Mesoescala

O problema da mesoescala compreende quatro níveis, e é o mais computacionalmente intenso. A solução deste problema fornece a função $\mathbf{k}(c(\mathbf{x}))$ para o problema da macroescala, descrito na Seção 3.4.

3.5.1 Nível 1

No primeiro nível, é considerada uma configuração particular do meio poroso como uma célula periódica, contendo diversas fibras. A geometria da célula para

uma determinada concentração c é mostrada na Figura 3.2 numa região quadrada, $(y_1, y_2) = \mathbf{y} \in \Omega_{cp}$, de comprimento característico \mathbf{l} , sendo incluídas N fibras de mesmo diâmetro d , onde

$$N = \frac{4c \mathbf{l}^2}{\mathbf{p} d^2}. \quad (3.45)$$

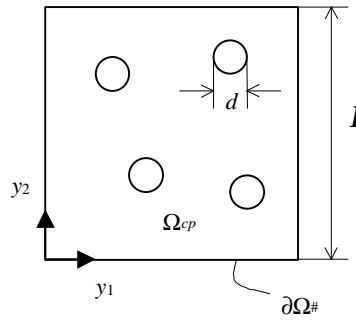


Figura 3.2 - Geometria de uma célula periódica.

Como mostrado na seção (3.3), a Equação (3.3) vale para a mesoescala, considerando-se que $u_{me,i} = u_{me,3}(\mathbf{y}) = u_{me,3}(y_1, y_2)$, \mathbf{m} não varia ao longo da mesoescala e o escoamento é totalmente desenvolvido, ou seja, a pressão varia linearmente com y_3 . A equação então torna-se

$$-\frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} \right) = \frac{1}{\mathbf{m} L} \Delta p \text{ em } \Omega_{cp}. \quad (3.46)$$

Esta equação é classificada como *Equação de Poisson*, onde o Laplaciano de uma função é igual a uma constante. Para resolver esta equação, são especificadas as condições de contorno de velocidade nula na superfície das fibras (condição de não deslizamento), e a condição de periodicidade,

$$u_{me,3}(\mathbf{y}) = u_{me,3}(\mathbf{y} + \mathbf{l} (m_j e_j)) \text{ em } \partial\Omega_{\#}, j = 1, 2, \quad (3.47)$$

onde $m_j \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, e_j é o vetor unitário na direção de y_j e $\Omega_{\#}$ é o contorno da célula periódica.

Para a solução numérica da equação (3.46), são introduzidas a velocidade e a posição normalizadas, escolhendo-se d como comprimento característico e U como velocidade característica, ou seja

$$u_{me,3}^* = \frac{u_{me,3}}{U}, \quad (3.48)$$

$$y_j^* = \frac{y_j}{d}. \quad (3.49)$$

A velocidade característica U é dada por

$$U = \frac{\Delta p}{L} \frac{d^2}{\mathbf{m}} \quad (3.50)$$

e a dimensão característica d é o diâmetro das fibras que compõem a fase dispersa. Inserindo as grandezas normalizadas em (3.46) tem-se que

$$-\frac{\partial}{\partial y_j^*} \left(\frac{\partial u_{me,3}^*}{\partial y_j^*} \right) = 1 \text{ em } \Omega_{cp}, j = 1, 2. \quad (3.51)$$

A permeabilidade longitudinal da célula periódica (ou do meio periódico infinito correspondente) para uma configuração particular $\{\mathbf{Y}\}_N$ é dada por

$$\mathbf{k}(c, \mathbf{I}, \{\mathbf{Y}\}_N) = \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{I}^2} \left(\frac{L}{\Delta p} \right) \int_{\Omega_{cp}} u_{me,3} d\mathbf{y}. \quad (3.52)$$

Introduzindo-se o funcional

$$\mathbf{I}_\Omega(\mathbf{v}) \equiv \frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\Delta p}{L} \int_\Omega v_3 d\mathbf{y}, \quad (3.53)$$

esta equação torna-se

$$\mathbf{k}(c, I, \{\mathbf{Y}\}_N) = \frac{\mathbf{m}^2 L^2}{I^2 \Delta p^2} \mathbf{I}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{u}_{me}). \quad (3.54)$$

Pode-se novamente normalizar a Equação (3.54) para \mathbf{k} :

$$\mathbf{k}^*(c, I^*, \{\mathbf{Y}^*\}_N) \equiv \frac{\mathbf{k}}{d^2} = \frac{1}{I^{*2}} \int_{\Omega_{cp}} u_{me,3}^* d\mathbf{y}^*, \quad (3.55)$$

onde

$$I^* = \frac{I}{d}. \quad (3.56)$$

Uma vez que $u_{me,3}^*$ pode ser calculado resolvendo-se numericamente a equação de Poisson correspondente, \mathbf{k} pode ser facilmente computado.

Agora será mostrado que a permeabilidade \mathbf{k} é sempre positiva. Introdz-se o funcional $\mathbf{J}_\Omega(\mathbf{v})$,

$$\mathbf{J}_\Omega(\mathbf{v}) = 2\mathbf{I}_\Omega(\mathbf{v}) - \int_\Omega \frac{\partial v_3}{\partial y_j} \frac{\partial v_3}{\partial y_j} d\mathbf{y} \quad (j = 1, 2). \quad (3.57)$$

Multiplicando a equação da conservação de quantidade de movimento por u_3 , obtém-se

$$-u_{me,3} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{m} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} \right) = \frac{\Delta p}{L} u_{me,3}; \quad (3.58)$$

integrando a Equação (3.58) em Ω_{cp} , chega-se a

$$-\int_{\Omega_{cp}} u_{me,3} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\mathbf{m} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} \right) d\mathbf{y} = \int_{\Omega_{cp}} \frac{\Delta p}{L} u_{me,3} d\mathbf{y}. \quad (3.59)$$

Como $\mathbf{m} \frac{\Delta p}{L}$ são independentes de \mathbf{y} ,

$$-\int_{\Omega_{cp}} u_{me,3} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} \right) d\mathbf{y} = \frac{1}{\mathbf{m}} \frac{\Delta p}{L} \int_{\Omega_{cp}} u_{me,3} d\mathbf{y} = \mathbf{I}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{u}_{me}). \quad (3.60)$$

Integrando por partes o lado esquerdo da Equação (3.60) e aplicando o Teorema de Green em sua forma escalar, tem-se que

$$\int_{\Omega_{cp}} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega_{cp}} u_{me,3} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} n_j ds = \mathbf{I}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{u}_{me}). \quad (3.61)$$

Impondo as condições de Dirichlet em (3.61), como $u_{me,3} = 0$ em $\partial\Omega_{cp}$, a integral em $\partial\Omega_{cp}$ torna-se nula. Conclui-se então que

$$\int_{\Omega_{cp}} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} d\mathbf{y} = \mathbf{I}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{u}_{me}) = \mathbf{J}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{u}_{me}), \quad (3.62)$$

onde o lado esquerdo da Equação (3.62) é necessariamente positivo, e o funcional $\mathbf{I}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{u}_{me})$ é proporcional à permeabilidade.

Agora, é necessário obter a forma variacional do problema para aplicar o método dos elementos finitos e para desenvolver os limites da microescala. Pode-se escrever que

$$u_{me,3} = \arg \max_{\mathbf{w} \in Z} \mathbf{J}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{w}), \quad (3.63)$$

onde o espaço $Z = \{\mathbf{w} = \mathbf{w}(y_1, y_2) \in H_{\#}^1(\Omega_{cp})\} \in H_{\#}^1(\Omega_{cp})$ é o espaço de todas as funções duplamente periódicas em I que podem ser quadrado-integradas em Ω_{cp} , assim como suas derivadas.

A forma fraca para u_3 então é derivada da primeira variação do funcional $\mathbf{J}_{\Omega_{cp}}(\mathbf{w})$. Para determinar esta variação, o funcional \mathbf{J} será avaliado em $\mathbf{w} + d\mathbf{w}$. Das Equações (3.52) e (3.56), tem-se que

$$\mathbf{J}_{\Omega}(\mathbf{w} + d\mathbf{w}) = \frac{2}{m} \frac{\Delta p}{L} \int_{\Omega} (\mathbf{w} + d\mathbf{w}) dy - \int_{\Omega} \frac{\partial(\mathbf{w} + d\mathbf{w})}{\partial x_j} \frac{\partial(\mathbf{w} + d\mathbf{w})}{\partial x_j} dy. \quad (3.64)$$

Separando as integrais da Equação (3.64), tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\Omega}(\mathbf{w} + d\mathbf{w}) = \frac{2}{m} \frac{\Delta p}{L} \left[\int_{\Omega} \mathbf{w} dy + \int_{\Omega} d\mathbf{w} dy \right] - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} dy - \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \frac{\partial d\mathbf{w}}{\partial x_j} dy - \\ - \int_{\Omega} \frac{\partial d\mathbf{w}}{\partial x_j} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} dy - \int_{\Omega} \frac{\partial d\mathbf{w}}{\partial x_j} \frac{\partial d\mathbf{w}}{\partial x_j} dy, \end{aligned} \quad (3.65)$$

que pode ser escrito como

$$\mathbf{J}_{\Omega}(\mathbf{w} + d\mathbf{w}) = \mathbf{J}_{\Omega}(\mathbf{w}) + d\mathbf{J}_{\Omega}(\mathbf{w}) - \int_{\Omega} \frac{\partial d\mathbf{w}}{\partial x_j} \frac{\partial d\mathbf{w}}{\partial x_j} dy, \quad (3.66)$$

onde

$$d\mathbf{J}_{\Omega}(\mathbf{w}) = \frac{2}{m} \frac{\Delta p}{L} \int_{\Omega} d\mathbf{w} dy - 2 \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_j} \frac{\partial d\mathbf{w}}{\partial x_j} dy. \quad (3.67)$$

Da Equação (3.63), como u_3 maximiza o funcional \mathbf{J} , tem-se que

$$d\mathbf{J}_{\Omega_{cp}}(u_{me,3}) = 0, \quad (3.68)$$

ou

$$\frac{2}{m} \frac{\Delta p}{L} \int_{\Omega_{cp}} du_{me,3} d\mathbf{y} - 2 \int_{\Omega_{cp}} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} \frac{\partial du_{me,3}}{\partial y_j} d\mathbf{y} = 0. \quad (3.69)$$

Identificando $\delta u_{me,3} = v$, o problema torna-se: encontrar $u_{me,3}(y_1, y_2) \in H_{\#}^1(\Omega_{cp})$ tal que

$$m \int_{\Omega_{cp}} \frac{\partial v}{\partial y_j} \frac{\partial u_{me,3}}{\partial y_j} d\mathbf{y} = \frac{\Delta p}{L} \int_{\Omega_{cp}} v d\mathbf{y}, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\Omega_{cp}), j = 1, 2. \quad (3.70)$$

Na forma adimensional, utilizando as mesmas grandezas características definidas anteriormente, tem-se

$$\int_{\Omega_{cp}} \frac{\partial v}{\partial y_j^*} \frac{\partial u_{me,3}^*}{\partial y_j^*} d\mathbf{y}^* = \int_{\Omega_{cp}} v d\mathbf{y}^*, \quad \forall v \in H_{\#}^1(\Omega_{cp}), j = 1, 2. \quad (3.71)$$

A Equação (3.71) é denominada de *forma variacional fraca* equivalente à forma forte do problema, descrita pelas Equações (3.46) e (3.47); também, a Equação (3.71) equivale à Equação (3.33) obtida na seção 3.3. A propriedade de maximização da permeabilidade pode ser definida através da combinação das Equações (3.54), (3.62) e (3.63), ou seja,

$$\mathbf{k} = \frac{m^2 L^2}{I^2 \Delta p^2} \max_{v_3 \in Z} \mathbf{J}_{\Omega_{cp}}(v_3). \quad (3.72)$$

3.5.2 Nível 2

No nível 2, é considerada a distribuição espacial de fibras na célula periódica. As posições das fibras são agora consideradas como variáveis randômicas, $\{\mathbf{Y}\}_N$, e a distribuição espacial é especificada por uma função densidade de probabilidade uniforme no domínio. Para um determinado valor de c e l , a permeabilidade é calculada para diversos arranjos.

3.5.3 Nível 3

Para uma dada concentração c , l é variada, com o objetivo de determinar o comprimento característico, indicador de que a célula periódica representa o meio poroso. À medida que se aumenta l , espera-se que a permeabilidade se aproxime de um valor assintótico.

3.5.4 Nível 4

No quarto e último nível, varia-se a concentração c , para que seja determinada a permeabilidade ao longo de todo o domínio da macroescala.

3.6 Microescala

No caso de haver fibras muito próximas, o problema da mesoescala se torna computacionalmente intenso, sendo necessário se obter um método de cálculo que evite as regiões confinadas entre estas fibras. Essas regiões são conhecidas como *regiões de estreito*. Nesta seção, são apresentados modelos de microescala apropriados para escoamento laminar longitudinal em meios porosos fibrosos. Estes modelos conduzem a um limite inferior e um limite superior para a permeabilidade longitudinal k . A formulação variacional do problema da mesoescala não é modificada por estes modelos, exceto pela substituição do domínio original Ω_{me} pelos domínios modificados pela eliminação das regiões de estreito.

3.6.1 Geometria das regiões de estreito

As geometrias das regiões de estreito para os limites superior e inferior são mostradas em detalhes na Figura 3.3. Nesta tese, foi considerado que, se a distância \mathbf{a} que separa duas fibras é menor que \mathbf{a}_c (parâmetro pré-definido), uma região de estreito se forma entre estas duas fibras e deve ser eliminada. Para o limite inferior (Figura 3.3a), define-se $D_{LI,n}$ como o domínio da região de estreito n para o limite inferior, $n = 1, 2, \dots, N_n$, onde N_n é o número de regiões de estreito na célula; \mathbf{b} é a metade da distância entre as extremidades de $D_{LI,n}$, paralelas à linha que une os centros das fibras; e $C_{LI} = \Omega_{me} \setminus \bigcup_{n=1}^{N_n} D_{LI,n}$ é o domínio da mesoescala modificado pela exclusão dos domínios das regiões de estreito D_{LI} . Para o limite superior (Figura 3.3b), define-se $D_{LS,n}$ como o domínio da região de estreito n para o limite superior; \mathbf{b} é a metade da distância entre as extremidades de $D_{LS,n}$, perpendiculares à linha que une os centros das fibras; e $C_{LS} = \Omega_{me} \setminus \bigcup_{n=1}^{N_n} D_{LS,n}$ é o domínio da mesoescala modificado pela inclusão dos domínios das regiões de estreito D_{LS} .

Nas subseções a seguir, são construídos limites superior e inferior rigorosos para a permeabilidade longitudinal,

$$\mathbf{k}_{LI} \leq \mathbf{k} \leq \mathbf{k}_{LS}, \quad (3.73)$$

baseados na solução definida sobre C_{LI} e C_{LS} , respectivamente. As regiões de estreito onde a geração de malhas se torna impossível são evitadas. Entretanto, um rigoroso controle é mantido sobre o erro resultante.

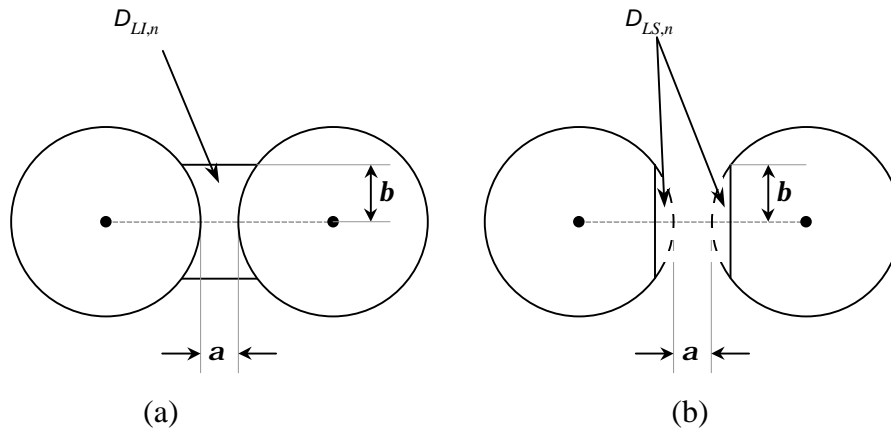


Figura 3.3 - Geometria das regiões de estreito para
(a) limite inferior, (b) limite superior.

3.6.2 Limite inferior

Um limite inferior para \mathbf{k} , \mathbf{k}_{LI} , pode ser obtido através da obstrução do escoamento nas regiões de estreito $D_{LI,n}$, diminuindo assim a área disponível para o escoamento. Portanto, a forma fraca do problema da mesoescala, a partir da modificação do domínio pela microescala para o limite inferior, é encontrar $u_{LI,3}(x_1, x_2) \in H_{\#}^1(C_{LI})$, tal que

$$\mathbf{m} \int_{C_{LI}} \frac{\partial v_3}{\partial y_j} \frac{\partial u_{LI,3}}{\partial y_j} dy = \frac{\Delta p}{L} \int_{C_{LI}} v_3 dy \quad \forall v_3 \in H_{\#}^1(C_{LI}). \quad (3.74)$$

A expressão para \mathbf{k}_{LI} é então equivalente ao funcional

$$\mathbf{k}_{LI} = \frac{\mathbf{m}}{I^2} \frac{L}{\Delta p} \int_{C_{LI}} u_{LI,3} dy. \quad (3.75)$$

Pretende-se agora provar que \mathbf{k}_{LI} é um limite inferior. São considerados três escoamentos, mostrados na Figura 3.4 para uma única região de estreito. O escoamento (1) é o escoamento original no domínio Ω_{me} , levando ao problema geométrica e

computacionalmente rígido, cuja solução é o campo de velocidades $u_3 = u_3^{(1)}$, que satisfaz (3.33). O escoamento (2) é o escoamento modificado no domínio reduzido C_{LI} , cuja solução é o campo de velocidades $u_3 = u_3^{(2)}$, dado pela equação (3.74). O escoamento (3) é a extensão do escoamento (2) à geometria do escoamento (1), mas onde as regiões de bloqueio $D_{LI,n}$ são removidas e preenchidas com fluido em repouso. O escoamento estacionário nestas regiões é denominado $\mathbf{0}_{D_{LI,n}}$. A solução do escoamento (3) é o campo de velocidades $u_3^{(3)}$. Deseja-se mostrar que a permeabilidade \mathbf{k}_{LI} baseada no escoamento (2), dada por (3.75), é um limite inferior para a permeabilidade \mathbf{k} baseada no escoamento (1), dada por (3.52).

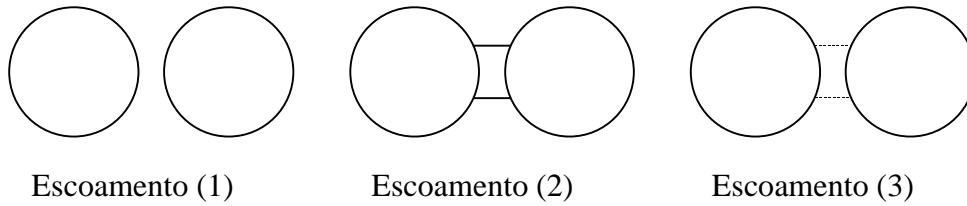


Figura 3.4 - Escoamentos para a demonstração da propriedade do limite inferior.

De fato, tem-se, similarmente ao apresentado em MACHADO, LISBOA & CRUZ (1999):

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{l}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \mathbf{J}_{\Omega_{me}}(u_3^{(1)}) \\ &\geq \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{l}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \mathbf{J}_{\Omega_{me}}(u_3^{(3)}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{l}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \left[\mathbf{J}_{C_{LI}}(u_3^{(2)}) + \bigcup_{n=1}^{N_n} \mathbf{J}_{D_{LI,n}}(\mathbf{0}_{D_{LI,n}}) \right] \\ &= \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{l}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \mathbf{J}_{C_{LI}}(u_3^{(2)}) = \mathbf{k}_{LI} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Os escoamentos (2) e (3) fornecem os mesmos valores para os funcionais $\mathbf{J}_{C_{Ll}}(u_3^{(2)})$ e $\mathbf{J}_{\Omega_{me}}(u_3^{(3)})$, respectivamente, porque o fluido estacionário que preenche as regiões de estreito no escoamento (3) não contribui para as integrais em (2).

3.6.3 Limite superior

Um limite superior para \mathbf{k} , \mathbf{k}_{LS} , pode ser obtido cortando-se cada par de fibras próximas como mostrado na Figura 3.3b, levando às regiões $D_{LS,n}$, o que aumenta a área disponível para o escoamento. Portanto, a forma fraca do problema da mesoescala, considerando-se o domínio modificado pela microescala para o limite superior, é encontrar $u_{LS,3}(x_1, x_2) \in H_{\#}^1(C_{LS})$ tal que

$$\mathbf{m} \int_{C_{LS}} \frac{\partial v_3}{\partial y_j} \frac{\partial u_{LS,3}}{\partial y_j} d\mathbf{y} = \frac{\Delta p}{L} \int_{C_{LS}} v_3 d\mathbf{y} \quad \forall v_3 \in H_{\#}^1(C_{LS}). \quad (3.78)$$

A expressão para \mathbf{k}_{LS} é então equivalente ao funcional

$$\mathbf{k}_{LS} = \frac{\mathbf{m}}{I^2} \frac{L}{\Delta p} \int_{C_{LS}} u_{3,LS} d\mathbf{y} \quad (3.79)$$

Pretende-se agora provar que \mathbf{k}_{LS} é um limite superior. São considerados três escoamentos, mostrados na Figura 3.5 para uma única região de estreito. O escoamento (1) é o escoamento original no domínio Ω_{me} , que leva ao problema geométrica e computacionalmente rígido, cuja solução é o campo de velocidades $u_3 = u_3^{(1)}$, que satisfaz (3.33). O escoamento (2) é o escoamento modificado no domínio aumentado C_{LS} , cuja solução é o campo de velocidades $u_3 = u_3^{(2)}$, dado pela equação (3.78). O escoamento (3) é a extensão do escoamento (2) à geometria do escoamento (1), mas onde as regiões de estreito $D_{LS,n}$ são removidas e preenchidas com fluido em repouso. O escoamento estacionário nestas regiões é denominado $\mathbf{0}_{D_{LS,n}}$. A solução do escoamento (3) é o campo de velocidades $u_3^{(3)}$. Deseja-se mostrar que a permeabilidade \mathbf{k}_{LS} baseada

no escoamento (2), dada por (3.79), é um limite inferior para a permeabilidade \mathbf{k} baseada no escoamento (1), dada por (3.52).

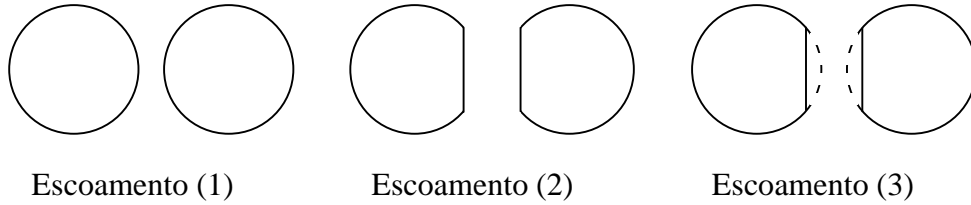


Figura 3.5 - Escoamentos para a demonstração da propriedade do limite superior.

De fato, tem-se, similarmente ao apresentado em MACHADO, LISBOA & CRUZ (1999):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k} &= \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{I}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \mathbf{J}_{\Omega_{me}}(u_3^{(1)}) \\
 &= \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{I}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \left[\mathbf{J}_{C_{LS,n}}(u_3^{(2)}) + \cup_{n=1}^{N_n} \mathbf{J}_{D_{LS,n}}(\mathbf{0}_{D_{UB,n}}) \right] \\
 &= \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{I}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \mathbf{J}_{C_{LS}}(u_3^{(2)}) \\
 &\leq \frac{\mathbf{m}^2}{\mathbf{I}^2} \frac{L^2}{\Delta p^2} \mathbf{J}_{C_{LS}}(u_3^{(2)}) = \mathbf{k}_{LS}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Os escoamentos (1) e (3) fornecem os mesmos valores para os funcionais $\mathbf{J}_{C_{LB}}(u_3^{(2)})$ e $\mathbf{J}_{\Omega_{me}}(u_3^{(3)})$, respectivamente, porque o fluido estacionário que preenche as regiões de estreito no escoamento (3) não contribui para as integrais em (2).