

CAPÍTULO 5

RESULTADOS E ANÁLISE

Inicialmente, neste capítulo, são apresentados resultados em arranjos regulares de fibras, sobre os quais existem diversos estudos analíticos que determinam a sua permeabilidade, visando uma validação do código computacional desenvolvido. A seguir são apresentados os valores de permeabilidade longitudinal para arranjos randômicos, que são comparados com valores experimentais encontrados na literatura. Para a obtenção de valores de permeabilidade, tanto para arranjos regulares quanto randômicos, são feitos estudos preliminares dos parâmetros para o cálculo, tais como o tamanho característico da malha de elementos finitos, o seu nível de refino e a tolerância de convergência dos gradientes conjugados.

5.1 Validação para Células Ordenadas

Inicialmente, com o intuito de validar os resultados obtidos nesta tese, foram considerados dois casos de meios porosos com suas fibras dispostas regularmente: o arranjo no qual os centros das fibras são posicionados nos vértices de quadrados (Figura 5.1a) e o arranjo no qual eles são posicionados nos vértices de triângulos equiláteros (Figura 5.1b). Os arranjos são chamados, nessa tese, de *Arranjo Quadrado* e *Arranjo Triangular*, respectivamente.

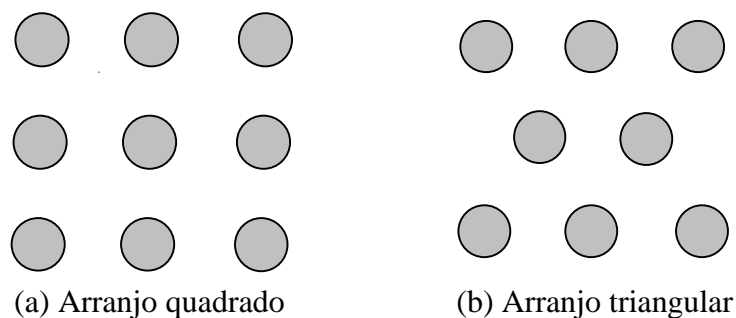


Figura 5.1 - Exemplos de tipos de arranjos.

Para que os resultados obtidos sejam validados, uma busca foi feita na literatura sobre artigos que descrevessem analiticamente o escoamento longitudinal nesses meios porosos ordenados. Dentre os artigos encontrados, são apresentados nessa tese os trabalhos de HAPPEL (1959), SPARROW & LOEFFLER (1959) e DRUMMOND & TAHIR (1984). Estes artigos foram selecionados por resolverem os problemas dos dois arranjos desejados, por métodos diferentes. Em particular, o trabalho de Happel foi o primeiro a descrever analiticamente o escoamento longitudinal em arranjos regulares. A seguir, é fornecida uma breve descrição de cada um desses trabalhos.

5.1.1 Happel

HAPPEL (1959) modelou o escoamento longitudinal totalmente desenvolvido de um fluido através de um meio poroso fibroso por meio de células dispostas em um arranjo quadrado (Figura 5.2a). Entretanto, ao invés de considerar o problema na célula unitária com um círculo no interior de um quadrado, ele modelou (i.e., aproximou) a célula como um círculo, de raio a , no centro de uma outra circunferência imaginária (Figura 5.2b). O raio desta circunferência é definido de modo que a célula unitária tenha a mesma concentração do meio poroso em estudo e em seu contorno é imposta a condição de velocidade máxima (ou, de forma equivalente, de tensão de cisalhamento nula).

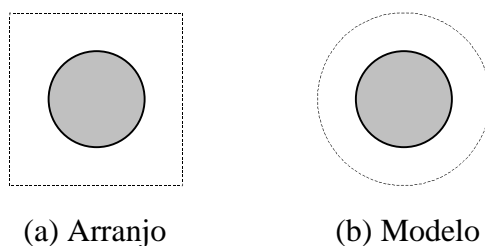


Figura 5.2 - Modelo de Happel para o arranjo quadrado.

Com esta aproximação da célula unitária, o modelo matemático tornou-se bastante simplificado, sendo necessário apenas resolver a equação de Navier Stokes (na qual os termos de inércia se anulam) escrita para coordenadas cilíndricas. As condições

de contorno consideradas são de velocidade nula na superfície da fibra e gradiente de velocidades nulo sobre a circunferência imaginária.

Resolvendo-se esta equação, chega-se ao campo de velocidades no domínio:

$$u = \frac{1}{4\mathbf{m}} \frac{\Delta p}{L} \left[(a^2 - r^2) + \frac{2a^2}{c} \ln \frac{r}{a} \right]. \quad (5.1)$$

Para encontrar a vazão volumétrica, Q , integra-se esta equação sobre a área do anel formado entre a fibra e a circunferência imaginária; o resultado é

$$Q = \frac{\mathbf{P}}{8\mathbf{m}} \frac{\Delta p}{L} \frac{a^4}{c^2} [4c - c^2 - 3 - 2 \ln c]. \quad (5.2)$$

Este resultado pode ser reescrito em termos da permeabilidade como função da concentração apenas, obtendo-se

$$\frac{\mathbf{k}}{d^2} = \frac{1}{32c} [4c - c^2 - 3 - 2 \ln c], \quad (5.3)$$

onde $d = 2a$. Com a equação (5.3), podem ser calculados os resultados obtidos por HAPPEL (1959), para comparação com os valores calculados nessa tese.

5.1.2 Sparrow & Loeffler

SPARROW & LOEFFLER (1959) consideraram os arranjos quadrado e triangular e desenvolveram uma solução analítica, baseada em séries trigonométricas truncadas, para o escoamento laminar totalmente desenvolvido entre os cilindros. A equação da conservação de quantidade de movimento foi escrita em coordenadas cilíndricas para regime permanente. Os autores chegaram à seguinte equação geral para a velocidade, válida para ambos os arranjos:

$$u = A + B \ln r - \frac{r^2}{4} \left(\frac{1}{\mathbf{m} L} \frac{\Delta p}{L} \right) + \sum_{k=1}^l (C_k r^k + D_k r^{-k}) (E_k \cos k\mathbf{q} + F_k \sin k\mathbf{q}), \quad (5.4)$$

onde l indica o número de termos da série e as constantes A , B , C_k , D_k , E_k e F_k dependem das condições de contorno aplicadas.

As células unitárias escolhidas estão representadas nas Figuras 5.3 e 5.4, onde são também mostradas as vistas gerais dos arranjos. É apresentada uma vista em detalhe da célula unitária considerada, onde a representa o raio da fibra e s é a metade da distância entre os centros de duas fibras vizinhas.

A equação (5.4) é então aplicada aos arranjos quadrado e triangular. Para os dois arranjos, as condições de contorno consideradas são as de velocidade nula na superfície das fibras e condição de simetria nos outros contornos. Impondo-se essas condições de contorno à equação (5.4), chega-se a

$$u = \frac{2}{\mathbf{p}} s^2 \left(\frac{1}{\mathbf{m} L} \frac{\Delta p}{L} \right) \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathbf{m} L} \frac{\Delta p}{L} \right) (r^2 - a^2) + \sum_{j=1}^l G_j \left(r^{4j} - \frac{a^{8j}}{r^{4j}} \right) \cos 4j\mathbf{q} \quad (5.5)$$

para o arranjo quadrado e a

$$u = \frac{\sqrt{3}}{\mathbf{p}} s^2 \left(\frac{1}{\mathbf{m} L} \frac{\Delta p}{L} \right) \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\mathbf{m} L} \frac{\Delta p}{L} \right) (r^2 - a^2) + \sum_{j=1}^l G_j \left(r^{6j} - \frac{a^{12j}}{r^{6j}} \right) \cos 6j\mathbf{q} \quad (5.6)$$

para o arranjo triangular, onde os coeficientes $G_j (= C_j E_j)$, $j = 1, 2, \dots, l$, são constantes.

A vazão volumétrica é obtida integrando-se os campos de velocidade nos domínios correspondentes onde o fluido escoar; obtém-se a expressão geral

$$Q = \left(-\frac{\Delta p}{L} \right) \frac{a^4}{\mathbf{m}} F \left(\frac{s}{a} \right), \quad (5.7)$$

onde $F(s/a)$ é uma função puramente geométrica, diferente para cada arranjo, e é computada com o auxílio de integrais apresentadas no artigo.

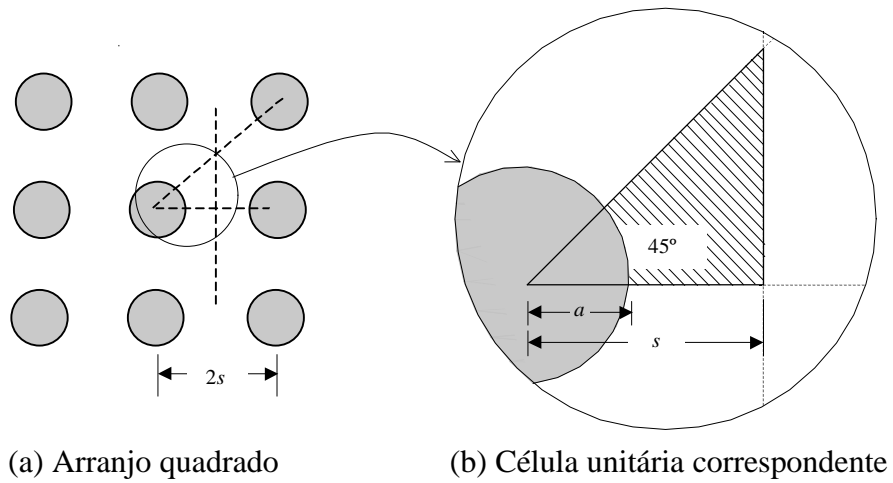


Figura 5.3 - Diagrama do arranjo quadrado.

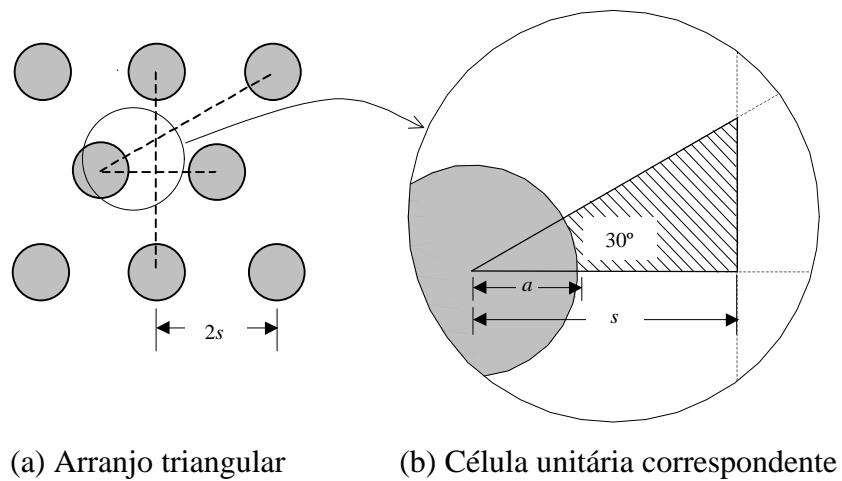


Figura 5.4 - Diagrama do arranjo triangular.

A equação (5.7) pode ser reescrita em termos da permeabilidade como função da concentração apenas, obtendo-se

$$\frac{k}{d^2} = \frac{c}{48p} F\left(\sqrt{\frac{p}{4c}}\right) \quad (5.8)$$

para o arranjo quadrado e

$$\frac{k}{d^2} = \frac{c}{48p} F\left(\sqrt{\frac{p}{2c\sqrt{3}}}\right) \quad (5.9)$$

para o arranjo triangular.

Os resultados de SPARROW & LOEFFLER (1959) são calculados através das equações (5.8) e (5.9). No artigo, estes autores utilizaram apenas seis termos para compor a série. Ao aumentar-se muito o número de termos, a série para o arranjo quadrado torna-se instável. A série para o arranjo triangular não apresenta problemas de convergência. Nesta tese foram utilizados vinte termos, valor para o qual as séries para ambos os arranjos puderam ser aplicadas até a concentração máxima.

5.1.3 Drummond & Tahir

DRUMMOND & TAHIR (1984) aplicaram o método das singularidades a fim de derivar expressões para a permeabilidade longitudinal (e transversal) de diversos arranjos ordenados de cilindros. Em cada arranjo, esses autores chegaram a duas expressões: uma genérica, abrangendo toda a faixa de concentrações; outra válida apenas para as concentrações próximas à concentração máxima de cada arranjo, onde os autores consideram que não há escoamento entre duas fibras muito próximas. Para o arranjo quadrado, as expressões encontradas foram

$$\frac{k}{d^2} = \frac{1}{16c} \left(-\ln(c) - 1,476 + 2c - \frac{c^2}{2} + \dots \right), \quad (5.10)$$

abrangendo toda a faixa de concentrações, e

$$\frac{k}{d^2} = \frac{p}{29,4c} \left[1 - \left(\frac{2c}{p} \right)^{1/2} \right]^4 \left\{ 1 + 0,473 \left[\left(\frac{p}{2c} \right)^{1/2} - 1 \right] + \dots \right\}, \quad (5.11)$$

válida apenas para altas concentrações. Para arranjo triangular, foram encontradas as expressões

$$\frac{k}{d^2} = \frac{1}{16c} \left(-\ln(c) - 1,498 + 2c - \frac{c^2}{2} + \dots \right) \quad (5.12)$$

e

$$\frac{k}{d^2} = \frac{p}{10\sqrt{3}c} \left[1 - \left(\frac{3\sqrt{3}c}{2p} \right)^{1/2} \right]^4 \left\{ 1 + 1,5 \left[\left(\frac{2p}{3\sqrt{3}c} \right)^{1/2} - 1 \right] + \dots \right\}, \quad (5.13)$$

para altas concentrações.

Os resultados de DRUMMOND & TAHIR (1984) são calculados a partir das equações (5.10) e (5.11) para arranjo quadrado e das equações (5.12) e (5.13) para arranjo triangular. Como DRUMMOND & TAHIR (1984) não especificam as faixas de validade para suas equações, na comparação entre os modelos apresentados nesta tese, para cada concentração e cada arranjo, foi escolhido o valor entre as duas equações disponíveis que melhor concordou com os resultados obtidos por SPARROW & LOEFFLER (1959).

5.1.4 Análise dos Parâmetros Numéricos

As células unitárias regulares consideradas nessa tese estão apresentadas na Figura 5.5, representando um arranjo quadrado e um arranjo triangular. A Figura 5.6 apresenta as malhas geradas nas células para estes dois arranjos sem que haja eliminação das regiões de estreito. As Figura 5.7 apresenta as malhas para os dois arranjos, com

eliminação das regiões de estreito utilizando limite inferior e a Figura 5.8 apresenta as malhas com eliminação das regiões de estreito utilizando limite superior.

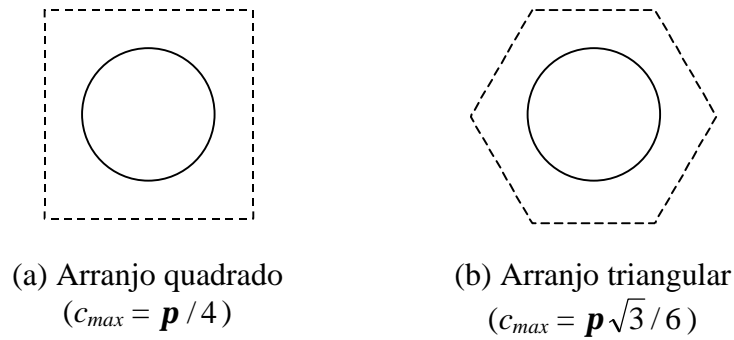


Figura 5.5 - Células unitárias utilizadas para arranjos regulares.

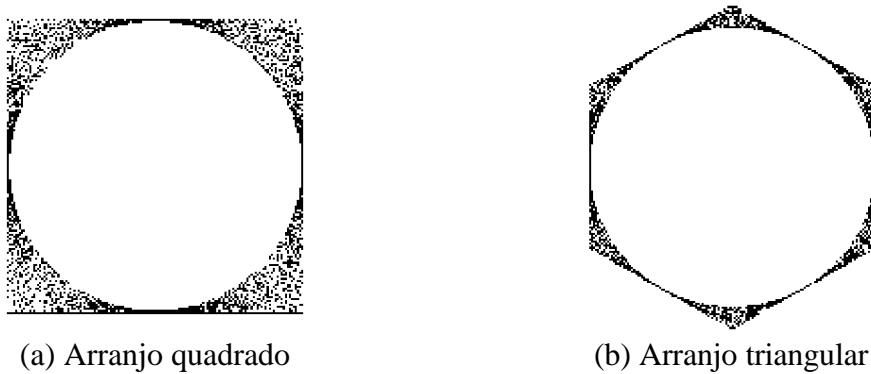


Figura 5.6 - Malhas para as células unitárias utilizadas para os arranjos quadrado e triangular sem eliminação das regiões de estreito.

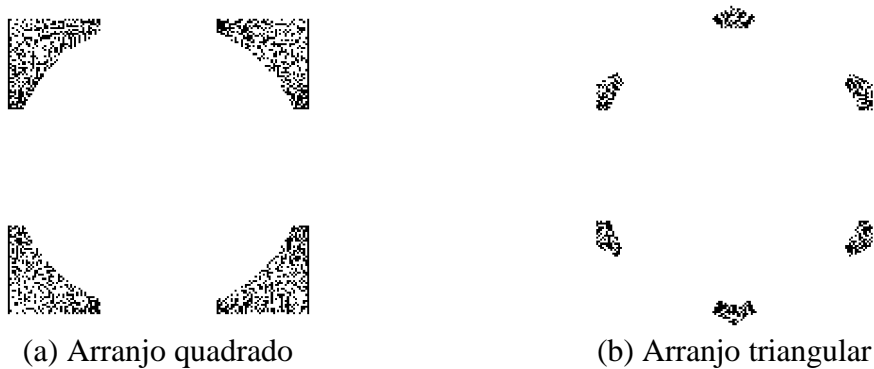
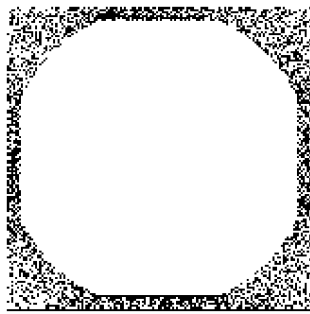
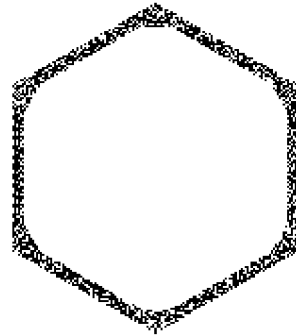


Figura 5.7 - Malhas para as células unitárias utilizadas para os arranjos quadrado e triangular com eliminação de regiões de estreito através da união das fibras.



(a) Arranjo quadrado



(b) Arranjo triangular

Figura 5.8 - Malhas para as células unitárias utilizadas para os arranjo quadrado e triangular com eliminação de regiões de estreito através do corte das fibras.

Para a obtenção de resultados, é necessária inicialmente a especificação de alguns parâmetros (MACHADO, LISBOA & CRUZ, 1999), que são: a tolerância de iteração incompleta no método dos gradientes conjugados, t ; o nível de refino global da malha, n_r ; o espaçamento preestabelecido da malha, $h_o^* \equiv h_o/d$; a distância crítica para a eliminação de regiões de estreito, $a_c^* \equiv a_c/d$; e a semi-largura da região de estreito, $b^* \equiv b/d$. Todos os parâmetros são determinados com base em critérios *numéricos*, não *físicos*. Todos os cálculos são efetuados em dupla precisão.

Para a escolha de t , tanto para o arranjo quadrado como para o triangular, utilizou-se a concentração de 0,5, com t variando de 10^{-3} até 10^{-12} . Os resultados obtidos para a permeabilidade longitudinal adimensionalizada pelo diâmetro, $k^* \equiv k/d^2$, são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 - Permeabilidade em função da tolerância t para arranjos regulares, $c = 0,5$.

t	k^*	
	Arranjo quadrado	Arranjo triangular.
$1,0 \times 10^{-12}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-11}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-10}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-9}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-8}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-7}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-6}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-5}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-4}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180557 \times 10^{-3}$
$1,0 \times 10^{-3}$	$1,1106764 \times 10^{-2}$	$8,8180556 \times 10^{-3}$

Com base nessa tabela, nota-se que os valores de permeabilidade obtidos a partir de $t = 10^{-4}$ não sofrem alteração até oito algarismos significativos. Optou-se, com base em outros testes auxiliares e de forma conservativa, para um valor de $t = 10^{-6}$ na geração dos resultados em malhas regulares.

Para o estudo do erro de discretização, é necessário definir dois parâmetros: o espaçamento predefinido da malha, h_o^* , e o nível de refino, n_r . Para estudo desses parâmetros em arranjos regulares, foram especificados dois valores de h_o^* (0,2 e 0,08), enquanto o valor de n_r variou de 0,5 a 5,0. Nesses cálculos, o erro de iteração incompleta oriundo da tolerância $t = 10^{-6}$ pode ser desprezado, por ser bem menor que o erro de discretização. Os valores de permeabilidade calculados foram comparados com os obtidos por SPARROW & LOEFFLER (1959), para diversos valores de concentração. Os valores de permeabilidade obtidos por estes autores, usados como referência, são: para o arranjo quadrado, $6,3828 \times 10^{-1}$ ($c = 0,1$), $5,8798 \times 10^{-2}$ ($c = 0,3$), $1,1113 \times 10^{-2}$ ($c = 0,5$) e $1,3685 \times 10^{-3}$ ($c = 0,77$); para o arranjo triangular, $6,2505 \times 10^{-1}$ ($c = 0,1$), $5,4472 \times 10^{-2}$ ($c = 0,3$), $3,4478 \times 10^{-3}$ ($c = 0,6$) e $8,4292 \times 10^{-5}$ ($c = 0,9$).

As Tabelas 5.2 e 5.3 apresentam os valores numéricos de permeabilidade obtidos para o arranjo quadrado com $h_o^* = 0,2$ e $0,08$, respectivamente, e n_r variando de 0,5 a 5,0. Também são apresentados nestas tabelas os erros absolutos encontrados entre esses valores e a base de comparação. Os valores de concentração utilizados foram 0,1, 0,3, 0,5 e 0,77. As Tabelas 5.4 e 5.5 apresentam os resultados correspondentes para o arranjo triangular, considerando as concentrações 0,1, 0,3, 0,6 e 0,9. Por outro lado, as Figuras 5.9, 5.10, 5.11 e 5.12 mostram a variação do erro absoluto, E_a , com o refino da malha, n_r , para as Tabelas 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, respectivamente.

Tabela 5. 2 - Variação do erro de discretização em função do nível de refino da malha para o arranjo quadrado, $h_o^* = 0,2$, n_r variando de 0,5 a 5,0, $c \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,77\}$.

n_r	$c = 0,1$		$c = 0,3$		$c = 0,5$		$c = 0,77$	
	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a
0,5	6,3486x10 ⁻¹	3,4143x10 ⁻³	5,7350x10 ⁻²	1,4478x10 ⁻³	1,0615x10 ⁻²	4,9759x10 ⁻⁴	1,2503x10 ⁻³	1,1815x10 ⁻⁴
0,6	6,3578x10 ⁻¹	2,4946x10 ⁻³	5,7223x10 ⁻²	1,5750x10 ⁻³	1,0813x10 ⁻²	2,9958x10 ⁻⁴	1,3152x10 ⁻³	5,3308x10 ⁻⁵
0,7	6,3619x10 ⁻¹	2,0877x10 ⁻³	5,7606x10 ⁻²	1,1919x10 ⁻³	1,0849x10 ⁻²	2,6364x10 ⁻⁴	1,3308x10 ⁻³	3,7688x10 ⁻⁵
0,8	6,3664x10 ⁻¹	1,6420x10 ⁻³	5,8235x10 ⁻²	5,6296x10 ⁻⁴	1,0865x10 ⁻²	2,4815x10 ⁻⁴	1,3332x10 ⁻³	3,5320x10 ⁻⁵
0,9	6,3689x10 ⁻¹	1,3871x10 ⁻³	5,8303x10 ⁻²	4,9447x10 ⁻⁴	1,0910x10 ⁻²	2,0241x10 ⁻⁴	1,3377x10 ⁻³	3,0755x10 ⁻⁵
1,0	6,3672x10 ⁻¹	1,5529x10 ⁻³	5,8345x10 ⁻²	4,5285x10 ⁻⁴	1,0986x10 ⁻²	1,2719x10 ⁻⁴	1,3432x10 ⁻³	2,5297x10 ⁻⁵
1,2	6,3747x10 ⁻¹	8,0299x10 ⁻⁴	5,8498x10 ⁻²	2,9980x10 ⁻⁴	1,1027x10 ⁻²	8,6130x10 ⁻⁵	1,3550x10 ⁻³	1,3537x10 ⁻⁵
1,4	6,3781x10 ⁻¹	4,7061x10 ⁻⁴	5,8611x10 ⁻²	1,8679x10 ⁻⁴	1,1053x10 ⁻²	6,0273x10 ⁻⁵	1,3593x10 ⁻³	9,1689x10 ⁻⁶
1,6	6,3781x10 ⁻¹	4,6509x10 ⁻⁴	5,8642x10 ⁻²	1,5609x10 ⁻⁴	1,1067x10 ⁻²	4,5545x10 ⁻⁵	1,3603x10 ⁻³	8,1488x10 ⁻⁶
1,8	6,3792x10 ⁻¹	3,5711x10 ⁻⁴	5,8673x10 ⁻²	1,2476x10 ⁻⁴	1,1076x10 ⁻²	3,6789x10 ⁻⁵	1,3621x10 ⁻³	6,4193x10 ⁻⁶
2,0	6,3800x10 ⁻¹	2,8214x10 ⁻⁴	5,8673x10 ⁻²	1,2476x10 ⁻⁴	1,1083x10 ⁻²	2,9671x10 ⁻⁵	1,3635x10 ⁻³	5,0154x10 ⁻⁶
2,4	6,3803x10 ⁻¹	2,4899x10 ⁻⁴	5,8732x10 ⁻²	6,6148x10 ⁻⁵	1,1093x10 ⁻²	2,0299x10 ⁻⁵	1,3647x10 ⁻³	3,7539x10 ⁻⁶
2,8	6,3814x10 ⁻¹	1,3739x10 ⁻⁴	5,8747x10 ⁻²	5,0791x10 ⁻⁵	1,1098x10 ⁻²	1,4752x10 ⁻⁵	1,3655x10 ⁻³	2,9713x10 ⁻⁶
3,2	6,3818x10 ⁻¹	9,7119x10 ⁻⁵	5,8758x10 ⁻²	3,9254x10 ⁻⁵	1,1101x10 ⁻²	1,1945x10 ⁻⁵	1,3660x10 ⁻³	2,4561x10 ⁻⁶
3,6	6,3819x10 ⁻¹	8,5129x10 ⁻⁵	5,8766x10 ⁻²	3,1360x10 ⁻⁵	1,1104x10 ⁻²	9,1161x10 ⁻⁶	1,3664x10 ⁻³	2,1028x10 ⁻⁶
4,0	6,3820x10 ⁻¹	7,4949x10 ⁻⁵	5,8773x10 ⁻²	2,4599x10 ⁻⁵	1,1106x10 ⁻²	7,1761x10 ⁻⁶	1,3667x10 ⁻³	1,8193x10 ⁻⁶
4,5	6,3822x10 ⁻¹	6,1179x10 ⁻⁵	5,8779x10 ⁻²	1,9001x10 ⁻⁵	1,1107x10 ⁻²	6,0101x10 ⁻⁶	1,3669x10 ⁻³	1,5890x10 ⁻⁶
5,0	6,3823x10 ⁻¹	5,1489x10 ⁻⁵	5,8783x10 ⁻²	1,4812x10 ⁻⁵	1,1108x10 ⁻²	4,6791x10 ⁻⁶	1,3671x10 ⁻³	1,4299x10 ⁻⁶

Tabela 5. 3 - Variação do erro de discretização em função do nível de refino da malha para o arranjo quadrado, $h_o^* = 0,08$, n_r variando de 0,5 a 5,0, $c \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,77\}$.

n_r	$c = 0,1$		$c = 0,3$		$c = 0,5$		$c = 0,77$	
	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a
0,5	6,3691x10 ⁻¹	1,3628x10 ⁻³	5,8275x10 ⁻²	5,2260x10 ⁻⁴	1,0877x10 ⁻²	2,3622x10 ⁻⁴	1,3211x10 ⁻³	4,7360x10 ⁻⁵
0,6	6,3707x10 ⁻¹	1,2111x10 ⁻³	5,8422x10 ⁻²	3,7545x10 ⁻⁴	1,0926x10 ⁻²	1,8716x10 ⁻⁴	1,3370x10 ⁻³	3,1508x10 ⁻⁵
0,7	6,3782x10 ⁻¹	4,6103x10 ⁻⁴	5,8498x10 ⁻²	2,9978x10 ⁻⁴	1,0976x10 ⁻²	1,3698x10 ⁻⁴	1,3414x10 ⁻³	2,7045x10 ⁻⁵
0,8	6,3784x10 ⁻¹	4,3862x10 ⁻⁴	5,8589x10 ⁻²	2,0875x10 ⁻⁴	1,1029x10 ⁻²	8,3670x10 ⁻⁵	1,3466x10 ⁻³	2,1915x10 ⁻⁵
0,9	6,3794x10 ⁻¹	3,3471x10 ⁻⁴	5,8637x10 ⁻²	1,6072x10 ⁻⁴	1,1049x10 ⁻²	6,4362x10 ⁻⁵	1,3529x10 ⁻³	1,5600x10 ⁻⁵
1,0	6,3804x10 ⁻¹	2,3668x10 ⁻⁴	5,8651x10 ⁻²	1,4676x10 ⁻⁴	1,1061x10 ⁻²	5,1915x10 ⁻⁵	1,3568x10 ⁻³	1,1653x10 ⁻⁵
1,2	6,3810x10 ⁻¹	1,7509x10 ⁻⁴	5,8700x10 ⁻²	9,7335x10 ⁻⁵	1,1075x10 ⁻²	3,7673x10 ⁻⁵	1,3604x10 ⁻³	8,0869x10 ⁻⁶
1,4	6,3815x10 ⁻¹	1,3253x10 ⁻⁴	5,8733x10 ⁻²	6,4873x10 ⁻⁵	1,1087x10 ⁻²	2,5463x10 ⁻⁵	1,3621x10 ⁻³	6,3894x10 ⁻⁶
1,6	6,3816x10 ⁻¹	1,1402x10 ⁻⁴	5,8745x10 ⁻²	5,2408x10 ⁻⁵	1,1092x10 ⁻²	2,1103x10 ⁻⁵	1,3638x10 ⁻³	4,6510x10 ⁻⁶
1,8	6,3820x10 ⁻¹	7,3729x10 ⁻⁵	5,8756x10 ⁻²	4,1759x10 ⁻⁵	1,1096x10 ⁻²	1,6407x10 ⁻⁵	1,3646x10 ⁻³	3,8716x10 ⁻⁶
2,0	6,3821x10 ⁻¹	6,7549x10 ⁻⁵	5,8765x10 ⁻²	3,2484x10 ⁻⁵	1,1099x10 ⁻²	1,3453x10 ⁻⁵	1,3652x10 ⁻³	3,2760x10 ⁻⁶
2,4	6,3823x10 ⁻¹	4,7309x10 ⁻⁵	5,8775x10 ⁻²	2,2663x10 ⁻⁵	1,1104x10 ⁻²	9,2231x10 ⁻⁶	1,3660x10 ⁻³	2,5060x10 ⁻⁶
2,8	6,3824x10 ⁻¹	3,4329x10 ⁻⁵	5,8781x10 ⁻²	1,7026x10 ⁻⁵	1,1106x10 ⁻²	7,0991x10 ⁻⁶	1,3665x10 ⁻³	2,0149x10 ⁻⁶
3,2	6,3825x10 ⁻¹	2,6119x10 ⁻⁵	5,8785x10 ⁻²	1,2451x10 ⁻⁵	1,1108x10 ⁻²	5,1771x10 ⁻⁶	1,3668x10 ⁻³	1,7193x10 ⁻⁶
3,6	6,3826x10 ⁻¹	2,1039x10 ⁻⁵	5,8788x10 ⁻²	1,0209x10 ⁻⁵	1,1109x10 ⁻²	4,2001x10 ⁻⁶	1,3670x10 ⁻³	1,5005x10 ⁻⁶
4,0	6,3826x10 ⁻¹	1,6139x10 ⁻⁵	5,8789x10 ⁻²	8,5179x10 ⁻⁶	1,1110x10 ⁻²	3,2911x10 ⁻⁶	1,3671x10 ⁻³	1,3493x10 ⁻⁶
4,5	6,3826x10 ⁻¹	1,3159x10 ⁻⁵	5,8791x10 ⁻²	6,5889x10 ⁻⁶	1,1110x10 ⁻²	2,6331x10 ⁻⁶	1,3673x10 ⁻³	1,2111x10 ⁻⁶
5,0	6,3827x10 ⁻¹	1,0449x10 ⁻⁵	5,8792x10 ⁻²	5,4929x10 ⁻⁶	1,1111x10 ⁻²	2,1251x10 ⁻⁶	1,3674x10 ⁻³	1,1337x10 ⁻⁶

Tabela 5. 4 - Variação do erro de discretização em função do nível de refino da malha para o arranjo triangular, $h_o^* = 0,2$, n_r variando de 0,5 a 5,0, $c \in \{0,1; 0,3; 0,6; 0,9\}$.

n_r	$c = 0,1$		$c = 0,3$		$c = 0,6$		$c = 0,9$	
	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a
0,5	$6,1687 \times 10^{-1}$	$8,1770 \times 10^{-3}$	$5,2680 \times 10^{-2}$	$1,7915 \times 10^{-3}$	$3,0894 \times 10^{-3}$	$3,5836 \times 10^{-4}$	$7,3685 \times 10^{-5}$	$1,0607 \times 10^{-5}$
0,6	$6,2093 \times 10^{-1}$	$4,1218 \times 10^{-3}$	$5,2758 \times 10^{-2}$	$1,7139 \times 10^{-3}$	$3,3004 \times 10^{-3}$	$1,4742 \times 10^{-4}$	$7,7514 \times 10^{-5}$	$6,7777 \times 10^{-6}$
0,7	$6,2288 \times 10^{-1}$	$2,1704 \times 10^{-3}$	$5,3523 \times 10^{-2}$	$9,4907 \times 10^{-4}$	$3,3007 \times 10^{-3}$	$1,4710 \times 10^{-4}$	$8,0436 \times 10^{-5}$	$3,8554 \times 10^{-6}$
0,8	$6,2321 \times 10^{-1}$	$1,8426 \times 10^{-3}$	$5,3878 \times 10^{-2}$	$5,9344 \times 10^{-4}$	$3,3159 \times 10^{-3}$	$1,3191 \times 10^{-4}$	$8,1001 \times 10^{-5}$	$3,2906 \times 10^{-6}$
0,9	$6,2330 \times 10^{-1}$	$1,7532 \times 10^{-3}$	$5,3954 \times 10^{-2}$	$5,1773 \times 10^{-4}$	$3,3382 \times 10^{-3}$	$1,0959 \times 10^{-4}$	$8,1439 \times 10^{-5}$	$2,8529 \times 10^{-6}$
1,0	$6,2388 \times 10^{-1}$	$1,1714 \times 10^{-3}$	$5,4086 \times 10^{-2}$	$3,8521 \times 10^{-4}$	$3,3767 \times 10^{-3}$	$7,1105 \times 10^{-5}$	$8,1192 \times 10^{-5}$	$3,0993 \times 10^{-6}$
1,2	$6,2416 \times 10^{-1}$	$8,9284 \times 10^{-4}$	$5,4117 \times 10^{-2}$	$3,5429 \times 10^{-4}$	$3,4065 \times 10^{-3}$	$4,1281 \times 10^{-5}$	$8,2422 \times 10^{-5}$	$1,8699 \times 10^{-6}$
1,4	$6,2441 \times 10^{-1}$	$6,3560 \times 10^{-4}$	$5,4258 \times 10^{-2}$	$2,1327 \times 10^{-4}$	$3,4153 \times 10^{-3}$	$3,2501 \times 10^{-5}$	$8,3194 \times 10^{-5}$	$1,0973 \times 10^{-6}$
1,6	$6,2456 \times 10^{-1}$	$4,9262 \times 10^{-4}$	$5,4292 \times 10^{-2}$	$1,8002 \times 10^{-4}$	$3,4223 \times 10^{-3}$	$2,5457 \times 10^{-5}$	$8,3434 \times 10^{-5}$	$8,5788 \times 10^{-7}$
1,8	$6,2471 \times 10^{-1}$	$3,3654 \times 10^{-4}$	$5,4346 \times 10^{-2}$	$1,2529 \times 10^{-4}$	$3,4281 \times 10^{-3}$	$1,9642 \times 10^{-5}$	$8,3610 \times 10^{-5}$	$6,8211 \times 10^{-7}$
2,0	$6,2475 \times 10^{-1}$	$3,0107 \times 10^{-4}$	$5,4368 \times 10^{-2}$	$1,0359 \times 10^{-4}$	$3,4324 \times 10^{-3}$	$1,5385 \times 10^{-5}$	$8,3724 \times 10^{-5}$	$5,6809 \times 10^{-7}$
2,4	$6,2484 \times 10^{-1}$	$2,0901 \times 10^{-4}$	$5,4393 \times 10^{-2}$	$7,8566 \times 10^{-5}$	$3,4369 \times 10^{-3}$	$1,0889 \times 10^{-5}$	$8,3915 \times 10^{-5}$	$3,7688 \times 10^{-7}$
2,8	$6,2489 \times 10^{-1}$	$1,5640 \times 10^{-4}$	$5,4417 \times 10^{-2}$	$5,4984 \times 10^{-5}$	$3,4392 \times 10^{-3}$	$8,5587 \times 10^{-6}$	$8,4029 \times 10^{-5}$	$2,6325 \times 10^{-7}$
3,2	$6,2494 \times 10^{-1}$	$1,0860 \times 10^{-4}$	$5,4429 \times 10^{-2}$	$4,2593 \times 10^{-5}$	$3,4412 \times 10^{-3}$	$6,5320 \times 10^{-6}$	$8,4063 \times 10^{-5}$	$2,2911 \times 10^{-7}$
3,6	$6,2496 \times 10^{-1}$	$9,4843 \times 10^{-5}$	$5,4437 \times 10^{-2}$	$3,4265 \times 10^{-5}$	$3,4426 \times 10^{-3}$	$5,1345 \times 10^{-6}$	$8,4109 \times 10^{-5}$	$1,8260 \times 10^{-7}$
4,0	$6,2497 \times 10^{-1}$	$7,9023 \times 10^{-5}$	$5,4445 \times 10^{-2}$	$2,6650 \times 10^{-5}$	$3,4437 \times 10^{-3}$	$4,0505 \times 10^{-6}$	$8,4143 \times 10^{-5}$	$1,4852 \times 10^{-7}$
4,5	$6,2499 \times 10^{-1}$	$6,1663 \times 10^{-5}$	$5,4451 \times 10^{-2}$	$2,0594 \times 10^{-5}$	$3,4445 \times 10^{-3}$	$3,3029 \times 10^{-6}$	$8,4175 \times 10^{-5}$	$1,1702 \times 10^{-7}$
5,0	$6,2500 \times 10^{-1}$	$4,9413 \times 10^{-5}$	$5,4455 \times 10^{-2}$	$1,7116 \times 10^{-5}$	$3,4451 \times 10^{-3}$	$2,6742 \times 10^{-6}$	$8,4198 \times 10^{-5}$	$9,3790 \times 10^{-8}$

Tabela 5. 5 - Variação do erro de discretização em função do nível de refino da malha para o arranjo triangular, $h_o^* = 0,08$, n_r variando de 0,5 a 5,0, $c \in \{0,1; 0,3; 0,6; 0,9\}$.

n_r	$c = 0,1$		$c = 0,3$		$c = 0,6$		$c = 0,9$	
	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a	k^*	E_a
0,5	$6,2392 \times 10^{-1}$	$1,1336 \times 10^{-3}$	$5,3890 \times 10^{-2}$	$5,8205 \times 10^{-4}$	$3,2956 \times 10^{-3}$	$1,5220 \times 10^{-4}$	$7,6321 \times 10^{-5}$	$7,9708 \times 10^{-6}$
0,6	$6,2429 \times 10^{-1}$	$7,6041 \times 10^{-4}$	$5,4123 \times 10^{-2}$	$3,4859 \times 10^{-4}$	$3,3327 \times 10^{-3}$	$1,1510 \times 10^{-4}$	$7,9741 \times 10^{-5}$	$4,5510 \times 10^{-6}$
0,7	$6,2465 \times 10^{-1}$	$3,9701 \times 10^{-4}$	$5,4174 \times 10^{-2}$	$2,9811 \times 10^{-4}$	$3,3455 \times 10^{-3}$	$1,0230 \times 10^{-4}$	$8,0936 \times 10^{-5}$	$3,3555 \times 10^{-6}$
0,8	$6,2469 \times 10^{-1}$	$3,5744 \times 10^{-4}$	$5,4248 \times 10^{-2}$	$2,2329 \times 10^{-4}$	$3,3943 \times 10^{-3}$	$5,3510 \times 10^{-5}$	$8,1506 \times 10^{-5}$	$2,7862 \times 10^{-6}$
0,9	$6,2475 \times 10^{-1}$	$3,0497 \times 10^{-4}$	$5,4294 \times 10^{-2}$	$1,7748 \times 10^{-4}$	$3,4064 \times 10^{-3}$	$4,1411 \times 10^{-5}$	$8,1618 \times 10^{-5}$	$2,6743 \times 10^{-6}$
1,0	$6,2478 \times 10^{-1}$	$2,6952 \times 10^{-4}$	$5,4332 \times 10^{-2}$	$1,3943 \times 10^{-4}$	$3,4137 \times 10^{-3}$	$3,4097 \times 10^{-5}$	$8,2188 \times 10^{-5}$	$2,1033 \times 10^{-6}$
1,2	$6,2484 \times 10^{-1}$	$2,0818 \times 10^{-4}$	$5,4369 \times 10^{-2}$	$1,0248 \times 10^{-4}$	$3,4241 \times 10^{-3}$	$2,3658 \times 10^{-5}$	$8,3164 \times 10^{-5}$	$1,1282 \times 10^{-6}$
1,4	$6,2490 \times 10^{-1}$	$1,5101 \times 10^{-4}$	$5,4400 \times 10^{-2}$	$7,1521 \times 10^{-5}$	$3,4312 \times 10^{-3}$	$1,6546 \times 10^{-5}$	$8,3463 \times 10^{-5}$	$8,2877 \times 10^{-7}$
1,6	$6,2495 \times 10^{-1}$	$1,0457 \times 10^{-4}$	$5,4418 \times 10^{-2}$	$5,4074 \times 10^{-5}$	$3,4354 \times 10^{-3}$	$1,2370 \times 10^{-5}$	$8,3641 \times 10^{-5}$	$6,5054 \times 10^{-7}$
1,8	$6,2497 \times 10^{-1}$	$8,1263 \times 10^{-5}$	$5,4428 \times 10^{-2}$	$4,4169 \times 10^{-5}$	$3,4373 \times 10^{-3}$	$1,0519 \times 10^{-5}$	$8,3778 \times 10^{-5}$	$5,1421 \times 10^{-7}$
2,0	$6,2498 \times 10^{-1}$	$7,1413 \times 10^{-5}$	$5,4436 \times 10^{-2}$	$3,5692 \times 10^{-5}$	$3,4392 \times 10^{-3}$	$8,5452 \times 10^{-6}$	$8,3903 \times 10^{-5}$	$3,8917 \times 10^{-7}$
2,4	$6,2500 \times 10^{-1}$	$4,6613 \times 10^{-5}$	$5,4447 \times 10^{-2}$	$2,4853 \times 10^{-5}$	$3,4421 \times 10^{-3}$	$5,6621 \times 10^{-6}$	$8,4021 \times 10^{-5}$	$2,7096 \times 10^{-7}$
2,8	$6,2501 \times 10^{-1}$	$3,8043 \times 10^{-5}$	$5,4454 \times 10^{-2}$	$1,7650 \times 10^{-5}$	$3,4435 \times 10^{-3}$	$4,2292 \times 10^{-6}$	$8,4092 \times 10^{-5}$	$1,9949 \times 10^{-7}$
3,2	$6,2502 \times 10^{-1}$	$2,8443 \times 10^{-5}$	$5,4458 \times 10^{-2}$	$1,3783 \times 10^{-5}$	$3,4445 \times 10^{-3}$	$3,2926 \times 10^{-6}$	$8,4130 \times 10^{-5}$	$1,6172 \times 10^{-7}$
3,6	$6,2503 \times 10^{-1}$	$2,1263 \times 10^{-5}$	$5,4461 \times 10^{-2}$	$1,1037 \times 10^{-5}$	$3,4451 \times 10^{-3}$	$2,6525 \times 10^{-6}$	$8,4166 \times 10^{-5}$	$1,2538 \times 10^{-7}$
4,0	$6,2503 \times 10^{-1}$	$1,6673 \times 10^{-5}$	$5,4463 \times 10^{-2}$	$8,8953 \times 10^{-6}$	$3,4457 \times 10^{-3}$	$2,1033 \times 10^{-6}$	$8,4190 \times 10^{-5}$	$1,0194 \times 10^{-7}$
4,5	$6,2504 \times 10^{-1}$	$1,3693 \times 10^{-5}$	$5,4465 \times 10^{-2}$	$7,0923 \times 10^{-6}$	$3,4461 \times 10^{-3}$	$1,6513 \times 10^{-6}$	$8,4211 \times 10^{-5}$	$8,0511 \times 10^{-8}$
5,0	$6,2504 \times 10^{-1}$	$1,1063 \times 10^{-5}$	$5,4466 \times 10^{-2}$	$5,9093 \times 10^{-6}$	$3,4464 \times 10^{-3}$	$1,3305 \times 10^{-6}$	$8,4211 \times 10^{-5}$	$8,0511 \times 10^{-8}$

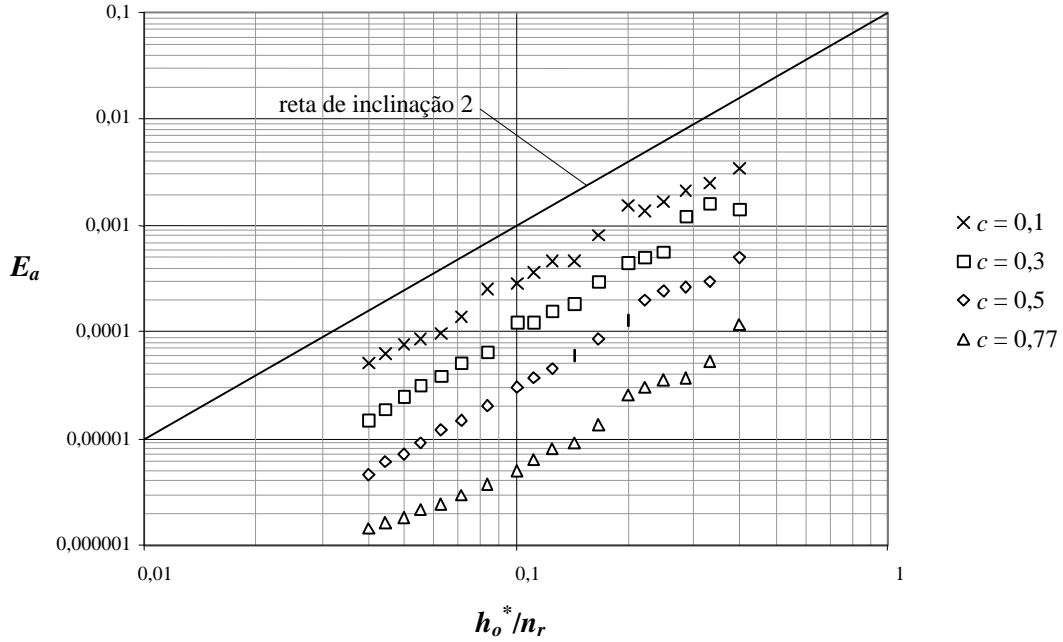


Figura 5.9 - Erro absoluto de discretização em função do refino da malha para o arranjo quadrado, $h_o^* = 0,2$, n_r variando de $0,5$ a $5,0$, $c \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,77\}$.

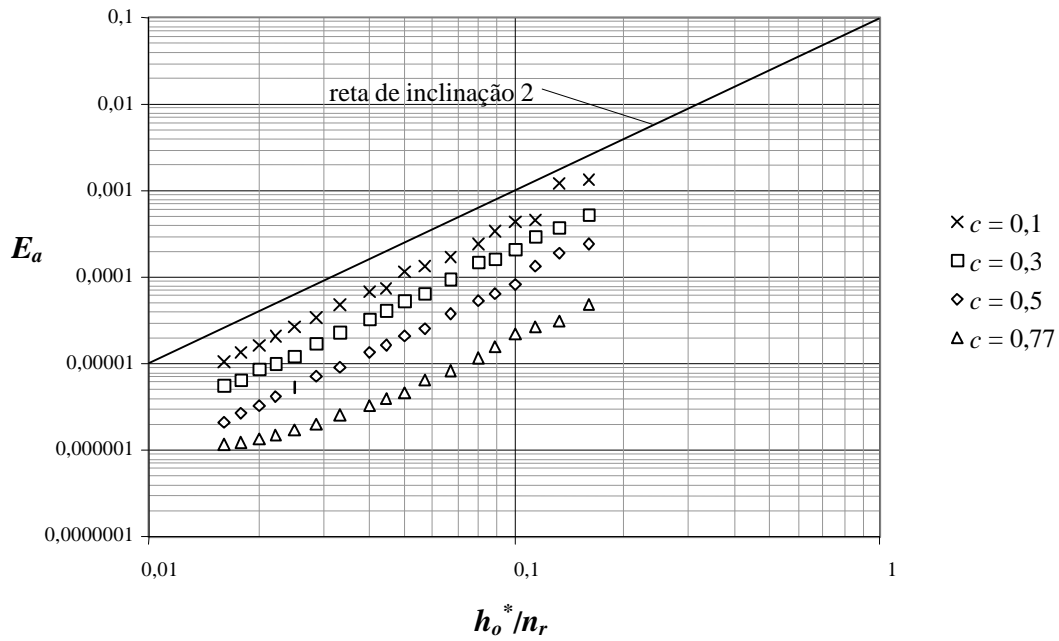


Figura 5.10 - Erro absoluto de discretização em função do refino da malha para o arranjo quadrado, $h_o^* = 0,08$, n_r variando de $0,5$ a $5,0$, $c \in \{0,1; 0,3; 0,5; 0,77\}$.

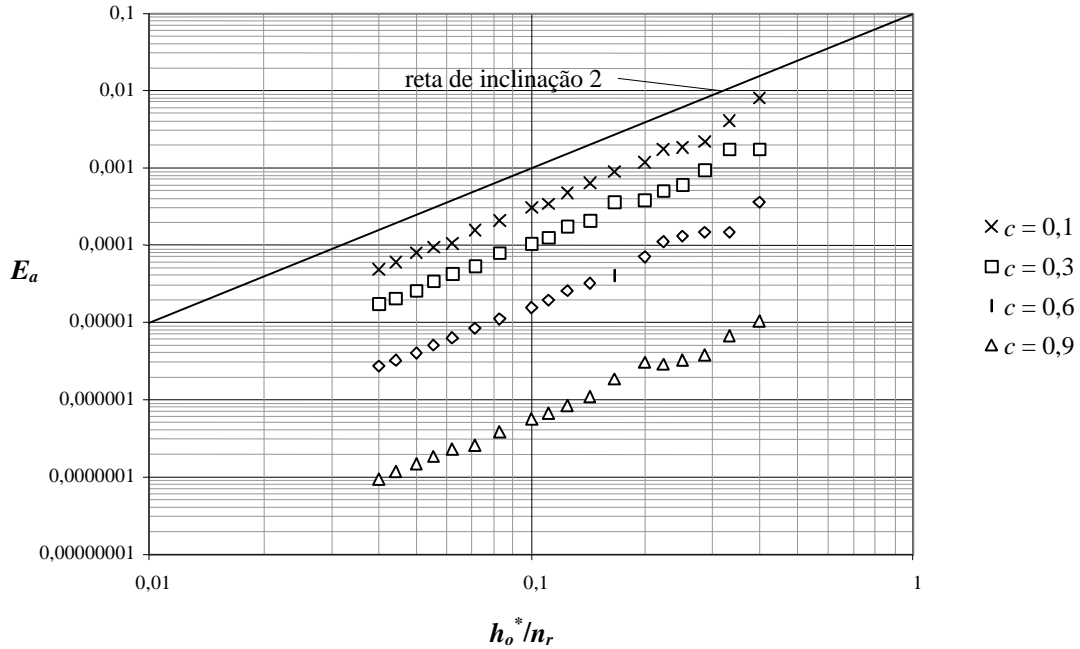


Figura 5.11 - Erro absoluto de discretização em função do refino da malha para o arranjo triangular, $h_o^* = 0,2$, n_r variando de $0,5$ a $5,0$, $c \in \{0,1; 0,3; 0,6; 0,9\}$.

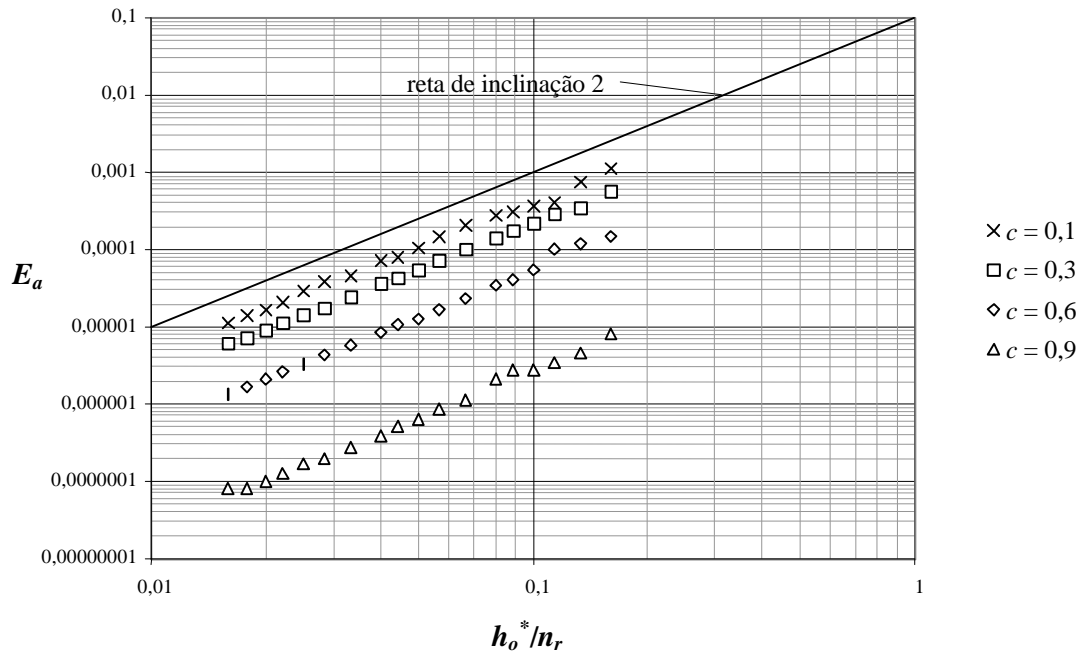


Figura 5.12 - Erro absoluto de discretização em função do refino da malha para o arranjo triangular, $h_o^* = 0,08$, n_r variando de $0,5$ a $5,0$, $c \in \{0,1; 0,3; 0,6; 0,9\}$.

Nota-se que, nos gráficos, as linhas imaginárias obtidas com a ligação dos pontos se aproximam de retas com inclinação 2/1. Como os eixos dos gráficos possuem escalas logarítmicas, o erro E_a então cai de acordo com a função $E_a = k h^2$, onde $h = h_o^*/n_r$ é o tamanho característico da malha e k é uma constante. Este resultado obtido está de acordo com o esperado pela utilização do método dos elementos finitos, com o uso de elementos isoparamétricos de primeira ordem (ZIENKIEWICZ, 1971).

Para a escolha final dos parâmetros h_o^* e n_r , foram levados em conta dois fatores: o tempo computacional e o erro de discretização. O principal fator de aumento de tempo computacional no cálculo da permeabilidade é a solução do sistema de equações. Para arranjos regulares, pelo fato de tanto o arranjo quadrado como o triangular serem compostos de apenas de uma única lajota, não há muitas equações. Conseqüentemente, o tempo gasto no cálculo destes problemas é pequeno, sendo viável a escolha de parâmetros que tornem as malhas bastante refinadas, com o objetivo de se minimizar o erro de discretização. Em função disso, os valores escolhidos foram $h_o^* = 0,08$ e $n_r = 3,0$ para o arranjo quadrado e $h_o^* = 0,08$ e $n_r = 5,0$ para o arranjo triangular. Com estes valores, os resultados podem ser apresentados com quatro algarismos significativos.

O parâmetro a_c^* , que definem se haverá ou não eliminação das regiões de estreito, não é determinado na análise em meios regulares. São analisadas inicialmente malhas sem a eliminação das regiões de estreito, ou seja, a_c^* é definido como zero. Nas malhas analisadas em que se deseja a eliminação das regiões de estreito, o parâmetro a_c^* escolhido é um valor qualquer maior do que a distância entre duas fibras. Esta distância pode ser facilmente determinada a partir da concentração, para cada arranjo.

O parâmetro que define a largura da região de estreito, b^* , também não é previamente determinado. A permeabilidade de arranjos onde as regiões de estreito são eliminadas é calculada utilizando-se múltiplos valores de b^* , para posterior análise do erro encontrado.

5.1.5 Comparações entre os Métodos Apresentados

Os resultados obtidos para a permeabilidade longitudinal de meios porosos ordenados, utilizando-se os valores dos parâmetros da seção 5.1.4, são apresentados em

três séries. Na primeira série, as Tabelas 5.6 e 5.7 apresentam, para os arranjos quadrado e triangular respectivamente, resultados para concentrações onde não há formação de regiões de estreito no domínio (note que os valores de c nessas tabelas são inferiores aos valores da concentração máxima para cada arranjo). Nestas tabelas, além dos valores calculados nessa tese, k_h^* , são apresentados também os resultados obtidos por Happel, k_{Hap}^* , Sparrow & Loeffler, k_{SL}^* , e Drummond & Tahir, k_{DT}^* .

Tabela 5. 6 - Comparação dos valores de permeabilidade obtidos para o arranjo quadrado, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 3,0$, $t = 10^{-6}$.

c	k_h^*	k_{Hap}^*	k_{SL}^*	k_{DT}^*
0,05	$2,023 \times 10^{+0}$	$1,993 \times 10^{+0}$	$2,023 \times 10^{+0}$	$2,023 \times 10^{+0}$
0,10	$6,382 \times 10^{-1}$	$6,235 \times 10^{-1}$	$6,383 \times 10^{-1}$	$6,383 \times 10^{-1}$
0,20	$1,603 \times 10^{-1}$	$1,529 \times 10^{-1}$	$1,603 \times 10^{-1}$	$1,603 \times 10^{-1}$
0,30	$5,878 \times 10^{-2}$	$5,395 \times 10^{-2}$	$5,880 \times 10^{-2}$	$5,880 \times 10^{-2}$
0,40	$2,479 \times 10^{-2}$	$2,130 \times 10^{-2}$	$2,480 \times 10^{-2}$	$2,480 \times 10^{-2}$
0,50	$1,111 \times 10^{-2}$	$8,518 \times 10^{-3}$	$1,111 \times 10^{-2}$	$1,111 \times 10^{-2}$
0,60	$5,098 \times 10^{-3}$	$3,211 \times 10^{-3}$	$5,102 \times 10^{-3}$	$5,101 \times 10^{-3}$
0,70	$2,353 \times 10^{-3}$	$1,042 \times 10^{-3}$	$2,355 \times 10^{-3}$	$2,355 \times 10^{-3}$
0,75	$1,597 \times 10^{-3}$	$5,360 \times 10^{-4}$	$1,598 \times 10^{-3}$	$1,601 \times 10^{-3}$
0,77	$1,367 \times 10^{-3}$	$3,990 \times 10^{-4}$	$1,368 \times 10^{-3}$	$1,372 \times 10^{-3}$

Tabela 5. 7 - Comparação dos valores de permeabilidade obtidos para o arranjo triangular, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 5,0$, $t = 10^{-6}$.

c	k_h^*	k_{SL}^*	k_{DT}^*
0,05	$1,996 \times 10^{+0}$	$1,996 \times 10^{+0}$	$1,996 \times 10^{+0}$
0,10	$6,250 \times 10^{-1}$	$6,251 \times 10^{-1}$	$6,251 \times 10^{-1}$
0,20	$1,537 \times 10^{-1}$	$1,537 \times 10^{-1}$	$1,537 \times 10^{-1}$
0,30	$5,447 \times 10^{-2}$	$5,447 \times 10^{-2}$	$5,447 \times 10^{-2}$
0,40	$2,168 \times 10^{-2}$	$2,168 \times 10^{-2}$	$2,168 \times 10^{-2}$
0,50	$8,818 \times 10^{-3}$	$8,821 \times 10^{-3}$	$8,825 \times 10^{-3}$
0,60	$3,446 \times 10^{-3}$	$3,448 \times 10^{-3}$	$3,459 \times 10^{-3}$
0,70	$1,218 \times 10^{-3}$	$1,219 \times 10^{-3}$	$1,239 \times 10^{-3}$
0,80	$3,620 \times 10^{-4}$	$3,623 \times 10^{-4}$	$3,696 \times 10^{-4}$
0,85	$1,806 \times 10^{-4}$	$1,807 \times 10^{-4}$	$1,875 \times 10^{-4}$
0,90	$8,422 \times 10^{-5}$	$8,429 \times 10^{-5}$	$8,865 \times 10^{-5}$

A segunda série apresenta os resultados obtidos quando se procede à eliminação das regiões de estreito para as duas maiores concentrações da primeira série de resultados, em cada arranjo; com esse fim, aumenta-se artificialmente o valor de a_c . As Tabelas 5.8 e 5.9 contêm os valores dos limites superior e inferior de k_h^* ,

respectivamente $k_{h,LI}^*$ e $k_{h,LS}^*$. Para o arranjo quadrado, $b^* \in \{0,23; 0,19; 0,16\}$ e $c \in \{0,75; 0,77\}$; para o arranjo triangular, $b^* \in \{0,23; 0,19; 0,15\}$ e $c \in \{0,85; 0,90\}$, e a_c^* é escolhido de modo a garantir que as regiões de estreito sejam eliminadas. Além disso, as tabelas apresentam também a permeabilidade estimada \bar{k}_h^* e o erro relativo associado E_r , calculados por

$$\bar{k}_h^* = \frac{1}{2} (k_{h,LI}^* + k_{h,LS}^*), \quad (5.14)$$

$$E_r = \frac{1}{2} \frac{(k_{h,LS}^* - k_{h,LI}^*)}{\bar{k}_h^*} \times 100\%. \quad (5.15)$$

Tabela 5. 8 - Limites para a permeabilidade longitudinal obtidos para arranjo quadrado, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 3,0$, $t = 10^{-6}$, $a_c^* = 0,20$, $b^* \in \{0,23; 0,19; 0,16\}$, $c \in \{0,75; 0,77\}$.

c		$b^* = 0,23$	$b^* = 0,19$	$b^* = 0,16$
0,75	$k_{h,LI}^*$	$1,451 \times 10^{-3}$	$1,554 \times 10^{-3}$	$1,582 \times 10^{-3}$
	$k_{h,LS}^*$	$1,787 \times 10^{-3}$	$1,652 \times 10^{-3}$	$1,616 \times 10^{-3}$
	\bar{k}_h^*	$1,619 \times 10^{-3}$	$1,603 \times 10^{-3}$	$1,599 \times 10^{-3}$
	E_r^*	10,4%	3,1%	1,1%
0,77	$k_{h,LI}^*$	$1,267 \times 10^{-3}$	$1,343 \times 10^{-3}$	$1,360 \times 10^{-3}$
	$k_{h,LS}^*$	$1,511 \times 10^{-3}$	$1,404 \times 10^{-3}$	$1,378 \times 10^{-3}$
	\bar{k}_h^*	$1,389 \times 10^{-3}$	$1,374 \times 10^{-3}$	$1,369 \times 10^{-3}$
	E_r^*	8,8%	2,2%	0,66%

Tabela 5. 9 - Limites para a permeabilidade longitudinal obtidos para arranjo triangular, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 5,0$, $t = 10^{-6}$, $a_c^* = 0,20$, $b^* \in \{0,23; 0,19; 0,15\}$, $c \in \{0,85; 0,90\}$.

c		$b^* = 0,23$	$b^* = 0,19$	$b^* = 0,15$
0,85	$k_{h,LI}^*$	$3,408 \times 10^{-5}$	$1,081 \times 10^{-4}$	$1,549 \times 10^{-4}$
	$k_{h,LS}^*$	$5,329 \times 10^{-4}$	$2,951 \times 10^{-4}$	$2,124 \times 10^{-4}$
	\bar{k}_h^*	$2,835 \times 10^{-4}$	$2,016 \times 10^{-4}$	$1,837 \times 10^{-4}$
	E_r^*	88,0%	46,4%	15,7%
0,90	$k_{h,LI}^*$	$2,039 \times 10^{-5}$	$6,210 \times 10^{-5}$	$8,015 \times 10^{-5}$
	$k_{h,LS}^*$	$2,810 \times 10^{-4}$	$1,345 \times 10^{-4}$	$9,380 \times 10^{-5}$
	\bar{k}_h^*	$1,507 \times 10^{-4}$	$9,830 \times 10^{-5}$	$8,698 \times 10^{-5}$
	E_r^*	86,5%	36,8%	7,8%

Por último, na terceira série, são apresentados resultados de k_h^* para dois valores de concentrações, incluindo aqueles correspondentes à concentração máxima, para os quais não é possível a geração da malha sem a eliminação das regiões de estreito. Estes resultados estão expostos nas Tabelas 5.10 e 5.11, para arranjos quadrado e triangular, respectivamente. Para o arranjo quadrado, $b^* \in \{0,23; 0,19; 0,16\}$ e $c \in \{0,785; c_{máx} = \pi/4\}$; para o arranjo triangular, $b^* \in \{0,15; 0,12\}$ e $c \in \{0,905; c_{máx} = p\sqrt{3}/6\}$. De mesmo modo que na segunda série, o valor de a_c^* é escolhido de modo a garantir que as regiões de estreito sejam eliminadas.

As Tabelas 5.10 e 5.11 apresentam também os valores encontrados utilizando-se os métodos sugeridos por Happel, k_{Hap}^* , Sparrow & Loeffler, k_{SL}^* , e Drummond & Tahir, k_{DT}^* .

Tabela 5. 10 - Limites para a permeabilidade longitudinal obtidos para arranjo quadrado,

$$h_o^* = 0,08, n_r = 3,0, t = 10^{-6}, a_c^* = 0,20, b^* \in \{0,23; 0,19; 0,16\}, c \in \{0,785; p/4\}.$$

c		$b^* = 0,23$	$b^* = 0,19$	$b^* = 0,16$	k_{Hap}^*	k_{SL}^*	k_{DT}^*
0,785	$k_{h,LI}^*$	$1,142 \times 10^{-3}$	$1,201 \times 10^{-3}$	$1,212 \times 10^{-3}$	$3,152 \times 10^{-4}$	$1,221 \times 10^{-3}$	$1,223 \times 10^{-3}$
	$k_{h,LS}^*$	$1,330 \times 10^{-3}$	$1,242 \times 10^{-3}$	$1,223 \times 10^{-3}$			
	\bar{K}_h^*	$1,236 \times 10^{-3}$	$1,222 \times 10^{-3}$	$1,218 \times 10^{-3}$			
	E_r^*	7,6%	1,7%	0,45%			
$p/4$	$k_{h,LI}^*$	$1,139 \times 10^{-3}$	$1,197 \times 10^{-3}$	$1,208 \times 10^{-3}$	$3,132 \times 10^{-4}$	$1,217 \times 10^{-3}$	$1,219 \times 10^{-3}$
	$k_{h,LS}^*$	$1,326 \times 10^{-3}$	$1,238 \times 10^{-3}$	$1,219 \times 10^{-3}$			
	\bar{K}_h^*	$1,233 \times 10^{-3}$	$1,218 \times 10^{-3}$	$1,214 \times 10^{-3}$			
	E_r^*	7,6%	1,7%	0,45%			

Tabela 5. 11 - Limites para a permeabilidade longitudinal obtidos para arranjo triangular,

$$h_o^* = 0,08, n_r = 5,0, t = 10^{-6}, a_c^* = 0,20, b^* \in \{0,15; 0,12\}, c \in \{0,905; p\sqrt{3}/6\}.$$

c		$b^* = 0,15$	$b^* = 0,12$	k_{Hap}^*	k_{SL}^*	k_{DT}^*
0,905	$k_{h,LI}^*$	$7,449 \times 10^{-5}$	$7,716 \times 10^{-5}$	$2,126 \times 10^{-5}$	$7,779 \times 10^{-5}$	$8,185 \times 10^{-5}$
	$k_{h,LS}^*$	$8,590 \times 10^{-5}$	$7,941 \times 10^{-5}$			
	\bar{K}_h^*	$8,020 \times 10^{-5}$	$7,829 \times 10^{-5}$			
	E_r^*	7,1%	1,5%			
$p\sqrt{3}/6$	$k_{h,LI}^*$	$7,241 \times 10^{-5}$	$7,489 \times 10^{-5}$	$1,994 \times 10^{-5}$	$7,546 \times 10^{-5}$	$7,939 \times 10^{-5}$
	$k_{h,LS}^*$	$8,306 \times 10^{-5}$	$7,690 \times 10^{-5}$			
	\bar{K}_h^*	$7,774 \times 10^{-5}$	$7,590 \times 10^{-5}$			
	E_r^*	6,8%	1,3%			

As Figuras 5.13 e 5.14 apresentam, para os resultados desta tese e dos demais modelos descritos nesta seção, a variação da permeabilidade adimensional em função da concentração, para os arranjos quadrado e triangular, respectivamente. Os resultados referentes ao método descrito por HAPPEL (1959), apesar de originalmente terem sido desenvolvidos como modelo do arranjo quadrado, são mostrados nos dois gráficos, já que a célula unitária utilizada é genérica, não restrita a um arranjo quadrado.

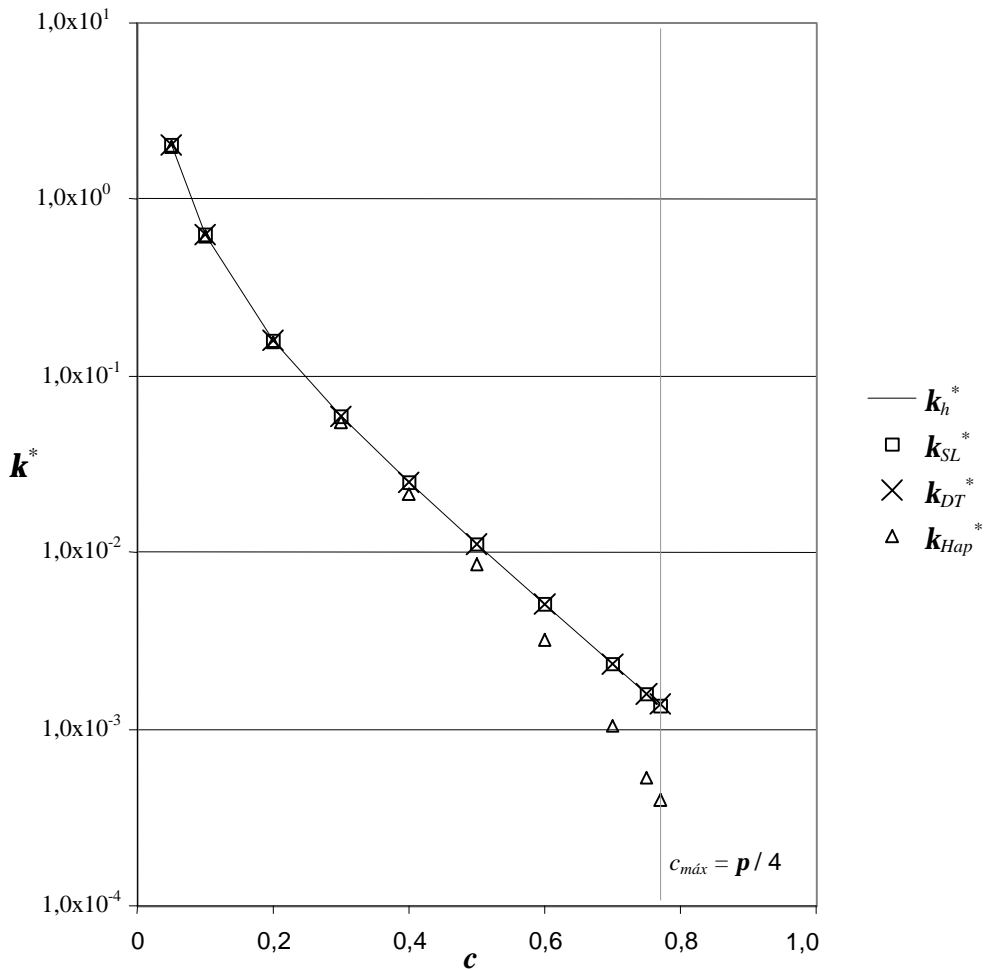


Figura 5.13 - Comparação dos valores obtidos para a permeabilidade longitudinal do arranjo quadrado como função da concentração.

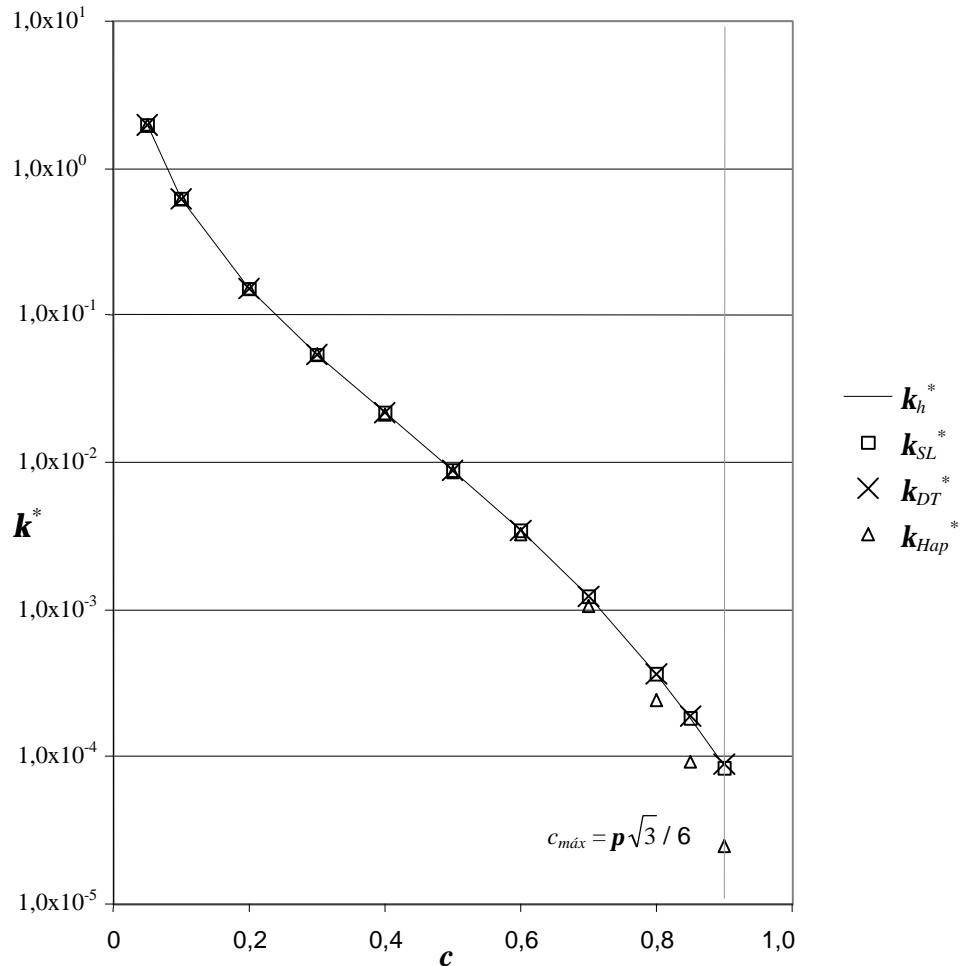


Figura 5.14 - Comparação dos valores obtidos para a permeabilidade longitudinal do arranjo triangular como função da concentração.

Em todos os casos, pode-se perceber que o arranjo triangular fornece valores de permeabilidade sempre menores do que o arranjo quadrado, por ser mais compacto. Nota-se também que o modelo proposto por HAPPEL (1959), apesar de inicialmente desenvolvido para arranjo quadrado, obteve valores mais próximos do arranjo triangular. Devido à aproximação da célula unitária por uma circunferência (configuração mais compacta, entretanto geometricamente impossível), este autor obteve valores ainda menores que o arranjo triangular. Esta aproximação fornece bons resultados para baixas concentrações; entretanto, à medida que a concentração aumenta, os valores se afastam dos resultados obtidos pelos demais trabalhos apresentados.

Pela análise dos gráficos e tabelas, percebe-se que os resultados calculados através da metodologia empregada nessa tese se aproximam bastante dos valores obtidos nos trabalhos apresentados por SPARROW & LOEFFLER (1959) e DRUMMOND & TAHIR (1984). Nos casos onde não foram consideradas eliminações das regiões de estreito, o erro relativo máximo encontrado com base nos resultados obtidos por estes autores foi de 0,785% (comparado aos resultados de Sparrow & Loeffler para arranjo triangular, concentração de 0,9).

Nos casos em que foram eliminadas as regiões de estreito, é mantido um rigoroso controle sobre o erro encontrado. Em todos os casos apresentados, os valores obtidos por SPARROW & LOEFFLER (1959) estão compreendidos entre os limites inferior e superior fornecidos pela solução numérica. O mesmo acontece com os resultados obtidos por DRUMMOND & TAHIR, à exceção dos valores de permeabilidade para as duas maiores concentrações em arranjo triangular. Estes valores são maiores que os limites superiores calculados numericamente para $b^* = 0,12$. Ainda assim, o erro relativo encontrado nestes casos foi abaixo de 2,25%.

O método proposto foi então validado, concordando com valores encontrados pelos dois métodos diferentes apresentados.

5.2 Meios Randômicos

Para o cálculo da permeabilidade longitudinal de uma célula randômica, o número de equações cresce consideravelmente, aumentando também o tempo de processamento. Além disso, a permeabilidade é função da disposição das fibras, ou seja, os resultados podem variar sensivelmente para uma mesma concentração, dependendo do arranjo das fibras na célula periódica. Um novo estudo dos parâmetros de entrada para o cálculo se faz necessário, levando-se em conta agora o tempo computacional.

A permeabilidade foi calculada para as concentrações 0,05, 0,1, 0,15, 0,2, 0,25, 0,3, 0,35, 0,4, 0,45 e 0,5. Esta faixa de valores de concentração foi escolhida porque, para concentrações abaixo de 0,05, o tempo computacional se torna muito elevado, ao passo que não se consegue gerar domínios para concentrações acima de 0,5 com a distribuição das fibras adotada neste trabalho. Em cada concentração, foram gerados

resultados para células periódicas com 2, 4, 6, 8, 12, 16, 20, 24, 32, 40 e 48 cilindros. Espera-se que, à medida que se aumenta o número de cilindros, a permeabilidade se aproxime de um valor assintótico, que poderia ser usado para meios porosos reais.

Um estudo estatístico se faz necessário, visto que, para um mesmo número de cilindros e uma mesma concentração, são possíveis infinitos arranjos diferentes. Quanto mais arranjos considerados, melhor será a amostra para se obter dados estatísticos. Nessa tese, utilizaram-se amostras de 100 arranjos distintos para cada par de valores de concentração e de número de cilindros.

5.2.1 Análise dos Parâmetros Numéricos

Para a escolha da tolerância de iteração incompleta no Método dos Gradientes Conjugados, t , foram analisados nove casos, utilizando as concentrações 0,1, 0,3 e 0,5, com células contendo 4, 16 e 32 cilindros. Nestes casos, o valor de t variou de 10^{-2} até 10^{-6} . Os resultados obtidos, bem como o tempo de execução para cada processamento, são apresentados nas Tabelas 5.12, 5.13 e 5.14 para 4, 16 e 32 cilindros, respectivamente.

Analisando-se as tabelas, chega-se à conclusão de que utilizando-se $t = 10^{-4}$, os valores de permeabilidade obtidos não se alteram para valores de t mais baixos, ao passo que o tempo de execução aumenta. Optou-se, de forma conservativa, por um valor de $t = 5,0 \times 10^{-5}$ para a geração dos resultados para meios randômicos.

Tabela 5. 12 - Permeabilidade e tempo de processamento em função da tolerância t em arranjos randômicos, 4 cilindros, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 2,0$.

t	c = 0,1	tempo	c = 0,3	tempo	c = 0,5	tempo
$1,0 \times 10^{-6}$	$7,9254089 \times 10^{-1}$	1min07s	$1,1279308 \times 10^{-1}$	21s	$1,3950803 \times 10^{-2}$	12s
$1,0 \times 10^{-5}$	$7,9254089 \times 10^{-1}$	1min02s	$1,1279308 \times 10^{-1}$	19s	$1,3950803 \times 10^{-2}$	10s
$1,0 \times 10^{-4}$	$7,9254089 \times 10^{-1}$	57s	$1,1279308 \times 10^{-1}$	17s	$1,3950803 \times 10^{-2}$	10s
$1,0 \times 10^{-3}$	$7,9254088 \times 10^{-1}$	48s	$1,1279308 \times 10^{-1}$	16s	$1,3950802 \times 10^{-2}$	10s
$1,0 \times 10^{-2}$	$7,9254024 \times 10^{-1}$	42s	$1,1279279 \times 10^{-1}$	16s	$1,3950744 \times 10^{-2}$	10s

Tabela 5.13 - Permeabilidade e tempo de processamento em função da tolerância t em arranjos randômicos, 16 cilindros, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 2,0$.

t	$c = 0,1$	tempo	$c = 0,3$	tempo	$c = 0,5$	tempo
1.0×10^{-6}	$9,0999803 \times 10^{-1}$	6min11s	$1,1939185 \times 10^{-1}$	1min36s	$1,7339329 \times 10^{-2}$	51s
1.0×10^{-5}	$9,0999803 \times 10^{-1}$	5min36s	$1,1939185 \times 10^{-1}$	1min29s	$1,7339329 \times 10^{-2}$	48s
1.0×10^{-4}	$9,0999803 \times 10^{-1}$	4min52s	$1,1939185 \times 10^{-1}$	1min15s	$1,7339329 \times 10^{-2}$	44s
1.0×10^{-3}	$9,0999802 \times 10^{-1}$	4min08s	$1,1939185 \times 10^{-1}$	1min07s	$1,7339329 \times 10^{-2}$	38s
1.0×10^{-2}	$9,0999689 \times 10^{-1}$	3min29s	$1,1939153 \times 10^{-1}$	57s	$1,7339231 \times 10^{-2}$	32s

Tabela 5.14 - Permeabilidade e tempo de processamento em função da tolerância t em arranjos randômicos, 32 cilindros, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 2,0$.

t	$c = 0,1$	tempo	$c = 0,3$	tempo	$c = 0,5$	tempo
1.0×10^{-6}	1,4100832	17min08s	$1,1267447 \times 10^{-1}$	3min04s	$1,8331615 \times 10^{-2}$	1min36s
1.0×10^{-5}	1,4100832	15min21s	$1,1267447 \times 10^{-1}$	2min43s	$1,8331615 \times 10^{-2}$	1min27s
1.0×10^{-4}	1,4100832	13min18s	$1,1267447 \times 10^{-1}$	2min24s	$1,8331615 \times 10^{-2}$	1min17s
1.0×10^{-3}	1,4100831	11min13s	$1,1267447 \times 10^{-1}$	2min08s	$1,8331614 \times 10^{-2}$	1min08s
1.0×10^{-2}	1,4100814	8min43s	$1,1267408 \times 10^{-1}$	1min46s	$1,8331521 \times 10^{-2}$	59s

Concluída esta primeira etapa, efetuou-se o estudo do erro de discretização, para que se obtivessem os valores dos parâmetros da malha: n_r e h_o^* . Neste estudo, foram considerados três casos, utilizando a concentração 0,1 em células contendo 16, 24 e 32 cilindros. Escolheu-se $t = 10^{-8}$ e, assim, desprezou-se o erro de iteração incompleta, por ser bem menor que o erro de discretização. Foram testados quatro valores para h_o^* , 0,2, 0,1, 0,08 e 0,06, e diversos valores para n_r , variando de 0,5 até 3,0. A permeabilidade e o tempo de execução para cada processamento são apresentados nas Tabelas 5.15, 5.16 e 5.17, para 16, 24 e 32 cilindros, respectivamente. Os traços (-) indicam os casos em que não foi possível gerar malha; esses casos requerem a eliminação das regiões de estreito, considerada posteriormente. Para auxílio da análise e seleção dos parâmetros, os valores de permeabilidade obtidos nessas tabelas são apresentados nos gráficos das Figuras 5.15, 5.16 e 5.17, respectivamente.

Tabela 5. 15 - Permeabilidade e tempo de processamento em função de n_r e h_o^*
para meios randômicos, 16 cilindros, $c = 0,1$, $t = 10^{-8}$.

n_r	$h_o^* = 0,2$		$h_o^* = 0,1$		$h_o^* = 0,08$		$h_o^* = 0,06$	
	k	Tempo	k	Tempo	k	Tempo	k	Tempo
0,5	$9,0526 \times 10^{-1}$	18s	$9,0856 \times 10^{-1}$	27s	$9,0905 \times 10^{-1}$	21s	$9,0947 \times 10^{-1}$	30s
0,6	$9,0691 \times 10^{-1}$	24s	$9,0901 \times 10^{-1}$	27s	$9,0942 \times 10^{-1}$	29s	$9,0967 \times 10^{-1}$	42s
0,7	$9,0773 \times 10^{-1}$	17s	$9,0937 \times 10^{-1}$	33s	$9,0958 \times 10^{-1}$	35s	$9,0976 \times 10^{-1}$	57s
0,8	$9,0856 \times 10^{-1}$	24s	$9,0952 \times 10^{-1}$	32s	$9,0970 \times 10^{-1}$	45s	$9,0982 \times 10^{-1}$	1min19s
0,9	$9,0887 \times 10^{-1}$	19s	$9,0960 \times 10^{-1}$	39s	$9,0975 \times 10^{-1}$	58s	$9,0988 \times 10^{-1}$	1min55s
1,0	$9,0919 \times 10^{-1}$	21s	$9,0972 \times 10^{-1}$	48s	$9,0982 \times 10^{-1}$	1min14s	$9,0991 \times 10^{-1}$	2min34s
1,2	$9,0933 \times 10^{-1}$	27s	$9,0982 \times 10^{-1}$	1min13s	$9,0990 \times 10^{-1}$	2min03s	$9,0996 \times 10^{-1}$	3min46s
1,4	$9,0954 \times 10^{-1}$	35s	$9,0989 \times 10^{-1}$	1min53s	$9,0994 \times 10^{-1}$	3min13s	$9,0999 \times 10^{-1}$	5min54s
1,6	$9,0965 \times 10^{-1}$	42s	$9,0993 \times 10^{-1}$	2min44s	$9,0996 \times 10^{-1}$	4min09s	$9,1000 \times 10^{-1}$	9min13s
1,8	$9,0973 \times 10^{-1}$	54s	$9,0995 \times 10^{-1}$	3min50s	$9,0998 \times 10^{-1}$	5min51s	$9,1001 \times 10^{-1}$	13min09s
2,0	$9,0980 \times 10^{-1}$	1min08s	$9,0997 \times 10^{-1}$	4min34s	$9,1000 \times 10^{-1}$	8min35s	$9,1002 \times 10^{-1}$	19min31s
2,2	$9,0984 \times 10^{-1}$	1min25s	$9,0999 \times 10^{-1}$	6min09s	$9,1001 \times 10^{-1}$	11min09s	$9,1003 \times 10^{-1}$	28min15s
2,4	$9,0988 \times 10^{-1}$	1min53s	$9,1000 \times 10^{-1}$	8min22s	$9,1002 \times 10^{-1}$	15min48s	-	-
2,6	$9,0991 \times 10^{-1}$	2min20s	$9,1001 \times 10^{-1}$	10min36s	$9,1002 \times 10^{-1}$	19min53s	-	-
2,8	$9,0993 \times 10^{-1}$	2min52s	$9,1001 \times 10^{-1}$	13min01s	$9,1003 \times 10^{-1}$	28min09s	-	-
3,0	$9,0995 \times 10^{-1}$	3min02s	$9,1002 \times 10^{-1}$	16min58s	$9,1003 \times 10^{-1}$	38min08s	-	-

Tabela 5. 16 - Permeabilidade e tempo de processamento em função de n_r e h_o^*
para meios randômicos, 24 cilindros, $c = 0,1$, $t = 10^{-8}$.

n_r	$h_o^* = 0,2$		$h_o^* = 0,1$		$h_o^* = 0,08$		$h_o^* = 0,06$	
	k	Tempo	k	Tempo	k	Tempo	k	Tempo
0,5	1,1701	15s	1,1729	28s	1,1733	31s	1,1737	43s
0,6	1,1714	16s	1,1733	30s	1,1736	38s	1,1739	1min05s
0,7	1,1718	18s	1,1736	35s	1,1738	54s	1,1740	1min37s
0,8	1,1728	21s	1,1738	46s	1,1739	1min10s	1,1741	2min17s
0,9	1,1730	24s	1,1739	59s	1,1740	1min35s	1,1741	3min13s
1,0	1,1733	26s	1,1740	1min15s	1,1741	2min05s	1,1742	3min57s
1,2	1,1737	33s	1,1741	2min07s	1,1741	3min30s	1,1742	6min39s
1,4	1,1738	42s	1,1741	3min13s	1,1742	4min57s	1,1742	11min01s
1,6	1,1739	58s	1,1742	4min15s	1,1742	7min37s	1,1742	16min31s
1,8	1,1740	1min19s	1,1742	5min55s	1,1742	11min08s	1,1743	24min35s
2,0	1,1740	1min42s	1,1742	8min25s	1,1742	15min34s	-	-
2,2	1,1741	2min12s	1,1742	11min26s	1,1743	20min59s	-	-
2,4	1,1741	2min44s	1,1742	14min57s	1,1743	29min33s	-	-
2,6	1,1741	3min06s	1,1743	18min41s	-	-	-	-
2,8	1,1742	3min47s	1,1743	18min43s	-	-	-	-
3,0	1,1742	4min39s	-	-	-	-	-	-

Tabela 5. 17 - Permeabilidade e tempo de processamento em função de n_r e h_o^* para meios randômicos, 32 cilindros, $c = 0.1$, $t = 10^{-8}$.

n_r	$h_o^* = 0,2$		$h_o^* = 0,1$		$h_o^* = 0,08$		$h_o^* = 0,06$	
	k	Tempo	k	Tempo	k	Tempo	k	Tempo
0,5	1,4058	22s	1,4088	26s	1,4092	35s	1,4096	58s
0,6	1,4072	17s	1,4091	35s	1,4095	51s	1,4097	1min33s
0,7	1,4078	20s	1,4095	47s	1,4097	1min10s	1,4099	2min17s
0,8	1,4083	24s	1,4096	1min02s	1,4098	1min42s	1,4099	3min23s
0,9	1,4088	26s	1,4097	1min21s	1,4098	2min21s	1,4100	4min18s
1,0	1,4091	32s	1,4098	1min53s	1,4099	3min07s	1,4100	5min47s
1,2	1,4094	43s	1,4099	2min59s	1,4100	4min44s	1,4100	10min08s
1,4	1,4096	1min01s	1,4100	4min11s	1,4100	7min42s	1,4101	16min27s
1,6	1,4097	1min24s	1,4100	6min13s	1,4100	11min28s	1,4101	26min51s
1,8	1,4098	1min49s	1,4100	9min16s	1,4101	16min26s	-	-
2,0	1,4099	2min27s	1,4101	12min49s	1,4101	22min34s	-	-
2,2	1,4099	2min51s	1,4101	16min48s	-	-	-	-
2,4	1,4100	3min39s	1,4101	22min40s	-	-	-	-
2,6	1,4100	4min40s	-	-	-	-	-	-
2,8	1,4100	5min53s	-	-	-	-	-	-
3,0	1,4100	7min24s	-	-	-	-	-	-

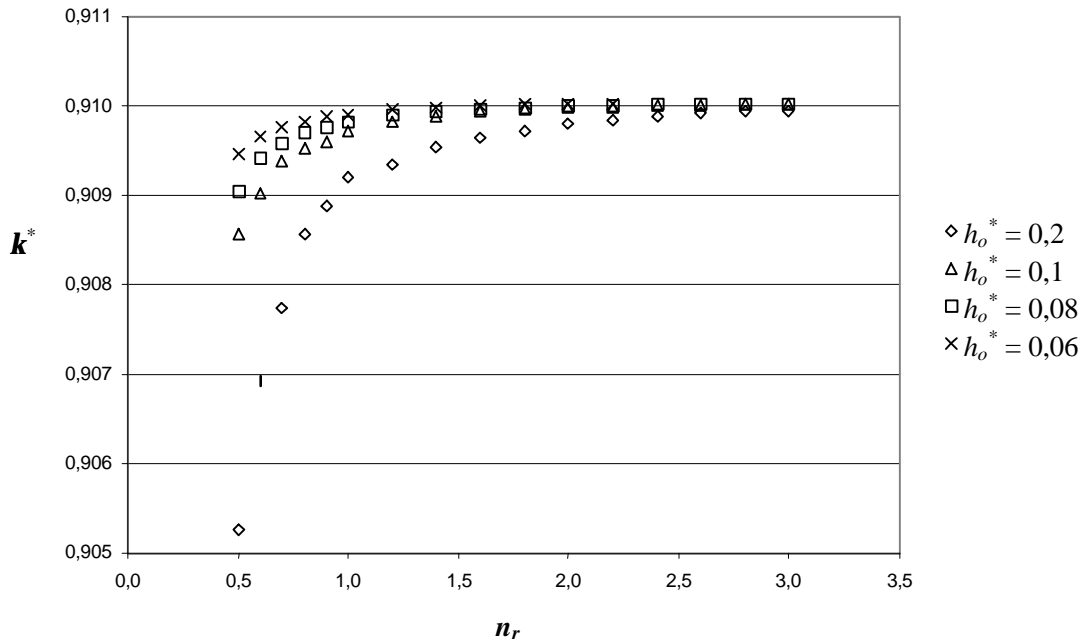


Figura 5. 15 - Permeabilidade em função do nível de refino da malha em arranjos randômicos, 16 cilindros, $c = 0,1$, $t = 10^{-8}$.

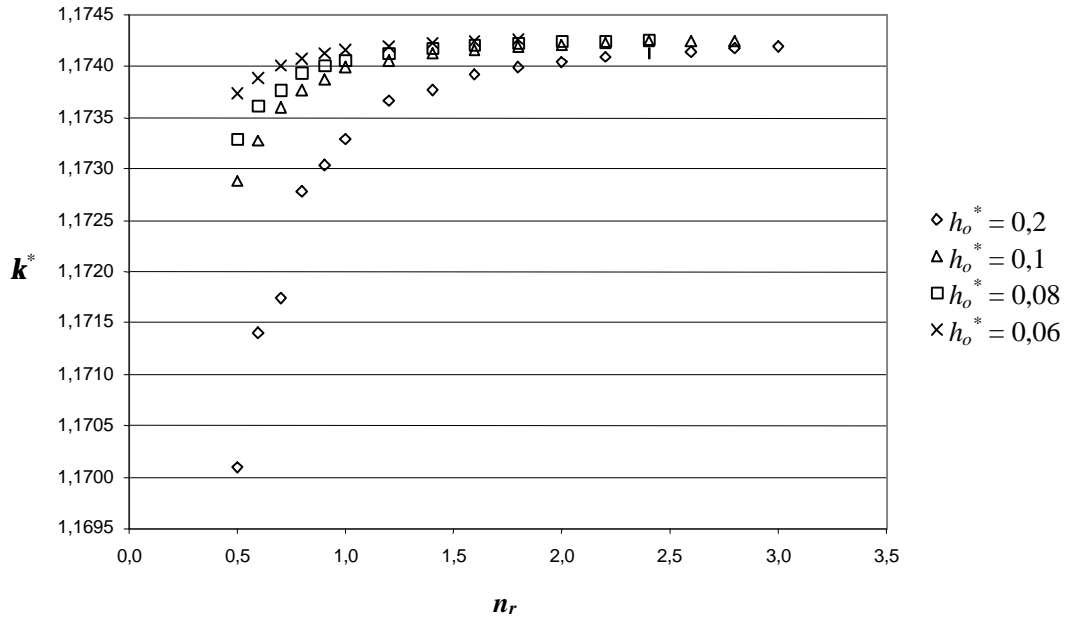


Figura 5. 16 - Permeabilidade em função do nível de refino da malha em arranjos randômicos, 24 cilindros, $c = 0,1$, $t = 10^{-8}$.

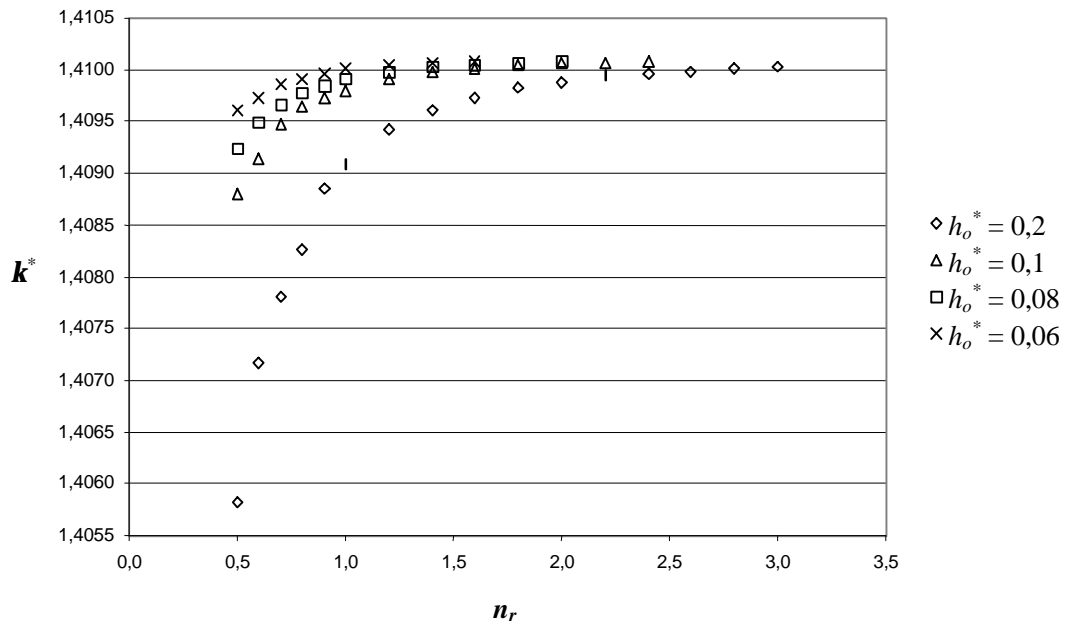


Figura 5. 17- Permeabilidade em função do nível de refino da malha em arranjos randômicos, 32 cilindros, $c = 0,1$, $t = 10^{-8}$.

Analisando as tabelas e os gráficos anteriores, pode-se concluir que utilizando $h_o^* = 0,08$ e $n_r = 2,0$, o resultado apresenta uma diferença apenas no quinto algarismo significativo, em um tempo muito menor de processamento, quando comparado com o máximo refino para o qual se conseguiu gerar malha. No caso de 16 cilindros, por exemplo, o tempo de processamento utilizando esses parâmetros foi cerca de 77% menor que o tempo gasto com $h_o^* = 0,08$ e $n_r = 3,0$. Optou-se então pela utilização de $h_o^* = 0,08$ e $n_r = 2,0$ para a geração dos resultados da tese para o arranjo randômico.

Definidos os valores de t , h_o^* e n_r , falta apenas selecionarem-se os valores de \mathbf{a}_c^* ($\mathbf{a}_c^* = \mathbf{a}_c / d$) e \mathbf{b}^* ($\mathbf{b}^* = \mathbf{b} / d$). Estes valores foram escolhidos de modo que o erro gerado pela eliminação de regiões de estreito fosse da mesma ordem de grandeza que o erro de discretização, ainda assim garantindo sempre que fossem obtidos limites inferior e superior para a permeabilidade.

O valor de \mathbf{a}_c^* foi selecionado como o mínimo valor para o qual o programa conseguiu fazer a triangulação do domínio em todos os arranjos considerados. Para valores abaixo de 0,08, em algumas malhas foram obtidos triângulos de área zero, ou seja, contendo dois pontos que, dentro dos limites de precisão da máquina, são coincidentes. Por essa razão, optou-se por utilizar $\mathbf{a}_c^* = 0,08$, o que permitiu a geração de todas as malhas consideradas.

Para a escolha de \mathbf{b}^* , foram analisados cinco arranjos distintos para cada uma das concentrações 0,1, 0,3 e 0,5. Para cada concentração, os arranjos 1, 2 e 3 possuem 8 cilindros, e os arranjos 4 e 5, 24 cilindros cada um. As Tabelas 5.18, 5.19 e 5.20 apresentam os valores de permeabilidade encontrados para as concentrações de 0,1, 0,3 e 0,5, respectivamente. Nestas tabelas, foram considerados os casos de limites inferior (LI) e superior (LS), com \mathbf{b}^* variando de 0,15 a 0,23 (para valores de \mathbf{b}^* abaixo de 0,23 e utilizando-se $\mathbf{a}_c^* = 0,08$, é garantido (MACHADO, 1998) que não haverá sobreposição de regiões de estreito). Também é apresentado, para cada arranjo, o caso sem eliminação das regiões de estreito ($\mathbf{b}^* = 0$).

Tabela 5. 18 - Valores da permeabilidade e limites associados em função de \mathbf{b}^* em 5 arranjos distintos, $c = 0,1$, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 2,0$, $\mathbf{t} = 5 \times 10^{-5}$, $\mathbf{a}_c^* = 0,08$.

	Arranjo 1	Arranjo 2	Arranjo 3	Arranjo 4	Arranjo 5
LI ($\mathbf{b}^* = 0,25$)	1,3296577	0,97863769	1,3868417	1,3822709	1,5149863
LI ($\mathbf{b}^* = 0,20$)	1,3296886	0,97864448	1,3868524	1,3822825	1,5149979
LI ($\mathbf{b}^* = 0,15$)	1,3297029	0,97864650	1,3868562	1,3822874	1,5150026
$\mathbf{b}^* = 0$	1,3297059	0,97864606	1,3868561	1,3822887	1,5150040
LS ($\mathbf{b}^* = 0,15$)	1,3297063	0,97864862	1,3868568	1,3822891	1,5150030
LS ($\mathbf{b}^* = 0,20$)	1,3297113	0,97864864	1,3868568	1,3822902	1,5150051
LS ($\mathbf{b}^* = 0,25$)	1,3297172	0,97865116	1,3868612	1,3822931	1,5150084

Tabela 5. 19 - Valores da permeabilidade e limites associados em função de \mathbf{b}^* em 5 arranjos distintos, $c = 0,3$, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 2,0$, $\mathbf{t} = 5 \times 10^{-5}$, $\mathbf{a}_c^* = 0,08$.

	Arranjo 1	Arranjo 2	Arranjo 3	Arranjo 4	Arranjo 5
LI ($\mathbf{b} = 0,25$)	$1,1046648 \times 10^{-1}$	$1,2486412 \times 10^{-1}$	$1,0937871 \times 10^{-1}$	$1,4123793 \times 10^{-1}$	$1,1313527 \times 10^{-1}$
LI ($\mathbf{b} = 0,20$)	$1,1047828 \times 10^{-1}$	$1,2488067 \times 10^{-1}$	$1,0941206 \times 10^{-1}$	$1,4124924 \times 10^{-1}$	$1,1316184 \times 10^{-1}$
LI ($\mathbf{b} = 0,15$)	$1,1048552 \times 10^{-1}$	$1,2488825 \times 10^{-1}$	$1,0942856 \times 10^{-1}$	$1,4125539 \times 10^{-1}$	$1,1317666 \times 10^{-1}$
$\mathbf{b}^* = 0$	$1,1048784 \times 10^{-1}$	$1,2488893 \times 10^{-1}$	$1,0943169 \times 10^{-1}$	$1,4125706 \times 10^{-1}$	$1,1318082 \times 10^{-1}$
LS ($\mathbf{b} = 0,15$)	$1,1048906 \times 10^{-1}$	$1,2489006 \times 10^{-1}$	$1,0943557 \times 10^{-1}$	$1,4125831 \times 10^{-1}$	$1,1318367 \times 10^{-1}$
LS ($\mathbf{b} = 0,20$)	$1,1049337 \times 10^{-1}$	$1,2489457 \times 10^{-1}$	$1,0944436 \times 10^{-1}$	$1,4126238 \times 10^{-1}$	$1,1319298 \times 10^{-1}$
LS ($\mathbf{b} = 0,25$)	$1,1050042 \times 10^{-1}$	$1,2490593 \times 10^{-1}$	$1,0946537 \times 10^{-1}$	$1,4126958 \times 10^{-1}$	$1,1320934 \times 10^{-1}$

Tabela 5. 20 - Valores da permeabilidade e limites associados em função de \mathbf{b}^* em 5 arranjos distintos, $c = 0,5$, $h_o^* = 0,08$, $n_r = 2,0$, $\mathbf{t} = 5 \times 10^{-5}$, $\mathbf{a}_c^* = 0,08$.

	Arranjo 1	Arranjo 2	Arranjo 3	Arranjo 4	Arranjo 5
LI ($\mathbf{b} = 0,25$)	$1,6434230 \times 10^{-2}$	$1,9404096 \times 10^{-2}$	$2,2712551 \times 10^{-2}$	$2,0436089 \times 10^{-2}$	$2,0348231 \times 10^{-2}$
LI ($\mathbf{b} = 0,20$)	$1,6440184 \times 10^{-2}$	$1,9418929 \times 10^{-2}$	$2,2797212 \times 10^{-2}$	$2,0453619 \times 10^{-2}$	$2,0388896 \times 10^{-2}$
LI ($\mathbf{b} = 0,15$)	$1,6443051 \times 10^{-2}$	$1,9429842 \times 10^{-2}$	$2,2852353 \times 10^{-2}$	$2,0463992 \times 10^{-2}$	$2,0415760 \times 10^{-2}$
$\mathbf{b}^* = 0$	$1,6443545 \times 10^{-2}$	$1,9434290 \times 10^{-2}$	$2,2872878 \times 10^{-2}$	$2,0467103 \times 10^{-2}$	$2,0425458 \times 10^{-2}$
LS ($\mathbf{b} = 0,15$)	$1,6444085 \times 10^{-2}$	$1,9438508 \times 10^{-2}$	$2,2885316 \times 10^{-2}$	$2,0469868 \times 10^{-2}$	$2,0432415 \times 10^{-2}$
LS ($\mathbf{b} = 0,20$)	$1,6446776 \times 10^{-2}$	$1,9452559 \times 10^{-2}$	$2,2925470 \times 10^{-2}$	$2,0479697 \times 10^{-2}$	$2,0456392 \times 10^{-2}$
LS ($\mathbf{b} = 0,25$)	$1,6452060 \times 10^{-2}$	$1,9475843 \times 10^{-2}$	$2,2991556 \times 10^{-2}$	$2,0496556 \times 10^{-2}$	$2,0496150 \times 10^{-2}$

Pela análise das Tabelas 5.19 e 5.20 (concentrações 0,3 e 0,5, respectivamente), percebe-se que para todos os arranjos o valor encontrado sem a eliminação de regiões de estreito é maior que todos os valores de limite inferior e menor que todos os valores de limite superior. Entretanto, observando a Tabela 5.18 ($c = 0,1$), percebe-se que para em alguns casos em que $\mathbf{b}^* = 0,15$ o valor encontrado para o limite inferior da permeabilidade ultrapassa o valor para $\mathbf{b}^* = 0$ (arranjos 2 e 3). Nota-se também que no arranjo 5 o valor encontrado para o limite superior da permeabilidade é menor que o valor para $\mathbf{b}^* = 0$. Isto ocorre porque o erro cometido com a eliminação das regiões de estreito (para o cálculo do limite inferior e/ou superior) é menor do que o erro de discretização associado com a malha obtida no domínio modificado (sem as regiões de estreito) com os parâmetros $h_o^* = 0,08$ e $n_r = 2,0$; assim, para se calcular efetivamente um limite inferior e superior, seria necessária uma malha bem mais refinada e possivelmente um computador com maiores palavras. O valor de $\mathbf{b}^* = 0,20$ foi então escolhido, por ter levado a resultados válidos de limites inferior e superior para estes casos testados.

5.2.2 Resultados Obtidos

Para cada concentração e número de cilindros são gerados 100 domínios, ou arranjos diferentes e é calculada a permeabilidade de cada arranjo. No caso de haver uma ou mais regiões de estreito em um dado domínio, a permeabilidade é então calculada como a média dos valores obtidos para os limites inferior e superior.

Para cada concentração é necessário um estudo estatístico dos resultados. As Figuras 5.18 a 5.27 apresentam histogramas para as concentrações de 0,05 a 0,50, que mostram a frequência de ocorrência de cada faixa de permeabilidade.

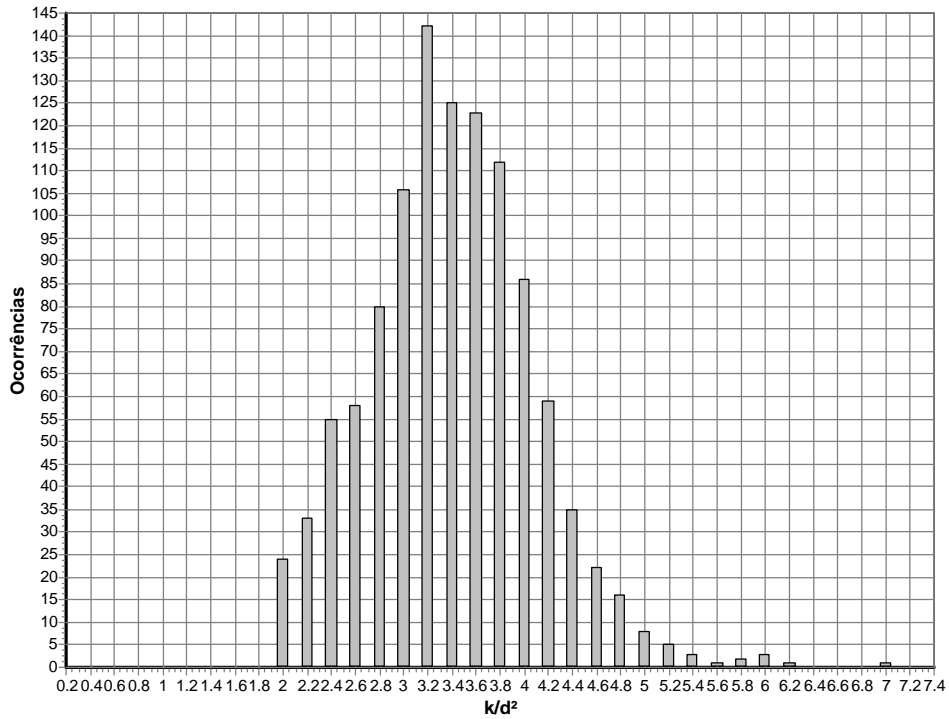


Figura 5.18 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,05.

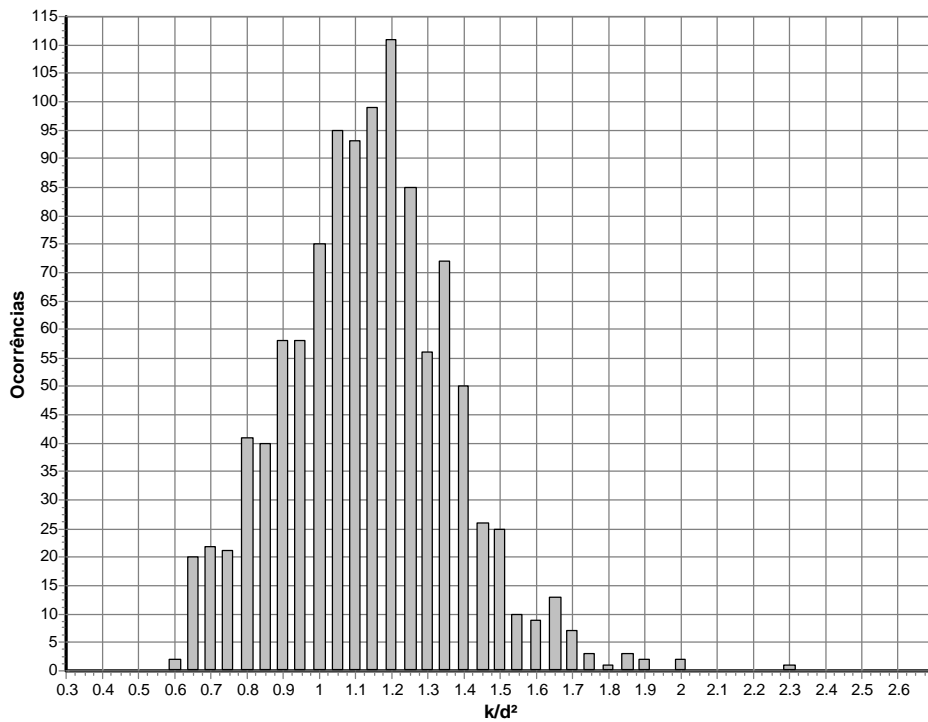


Figura 5.19 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,10.

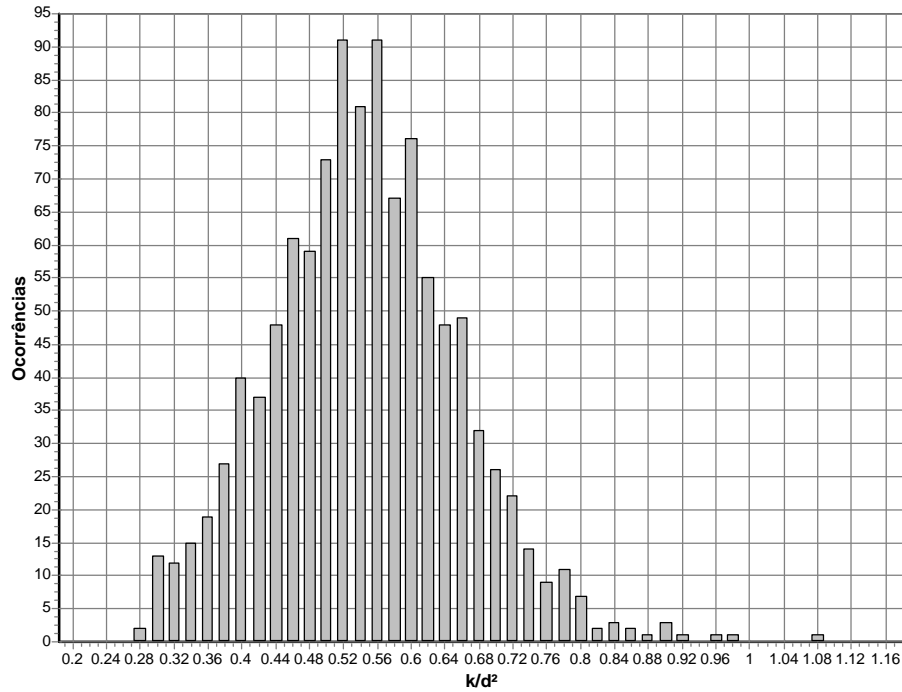


Figura 5.20 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,15.

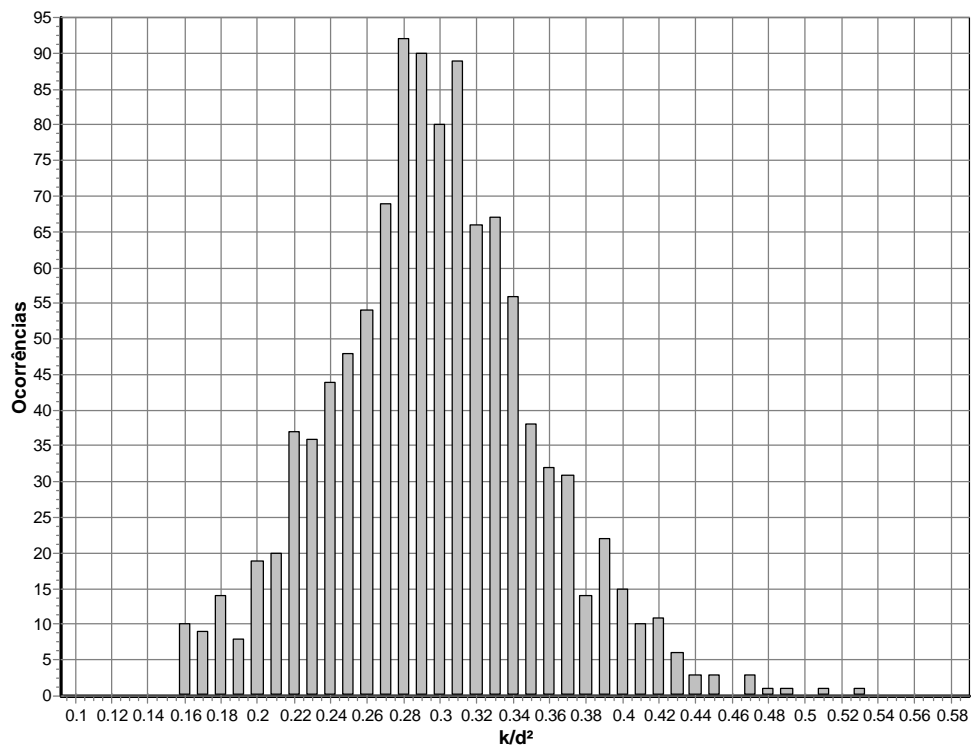


Figura 5.21 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,20.

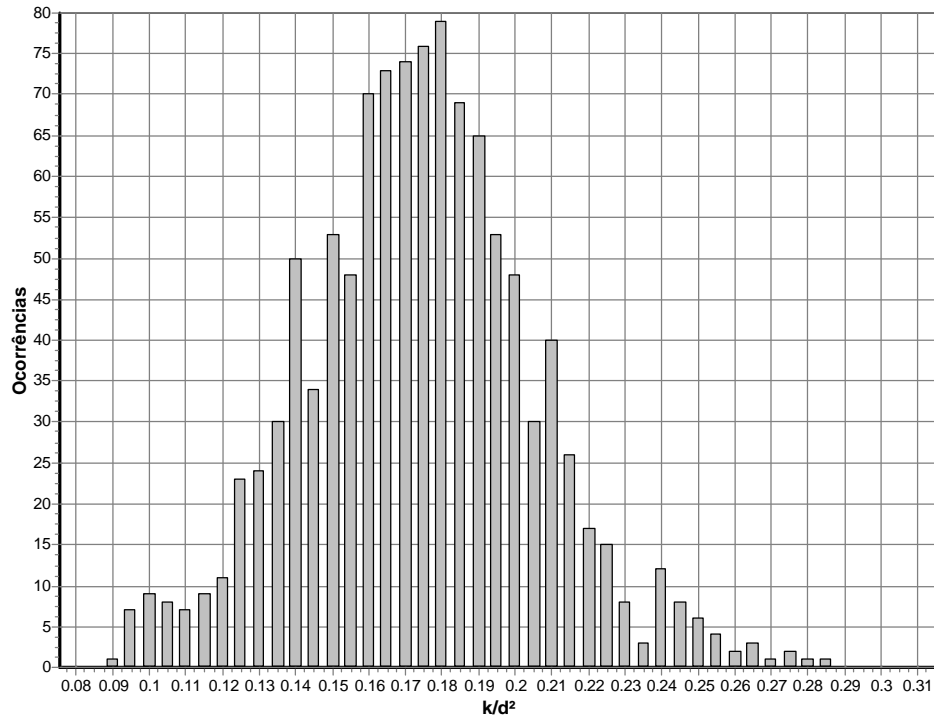


Figura 5.22 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,25.

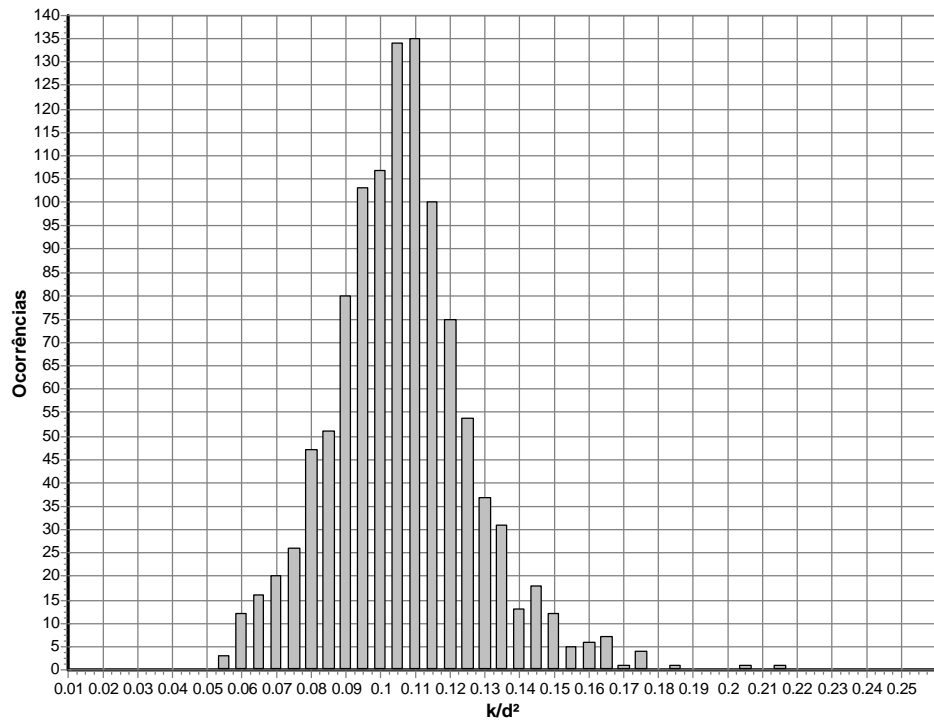


Figura 5.23 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,30.

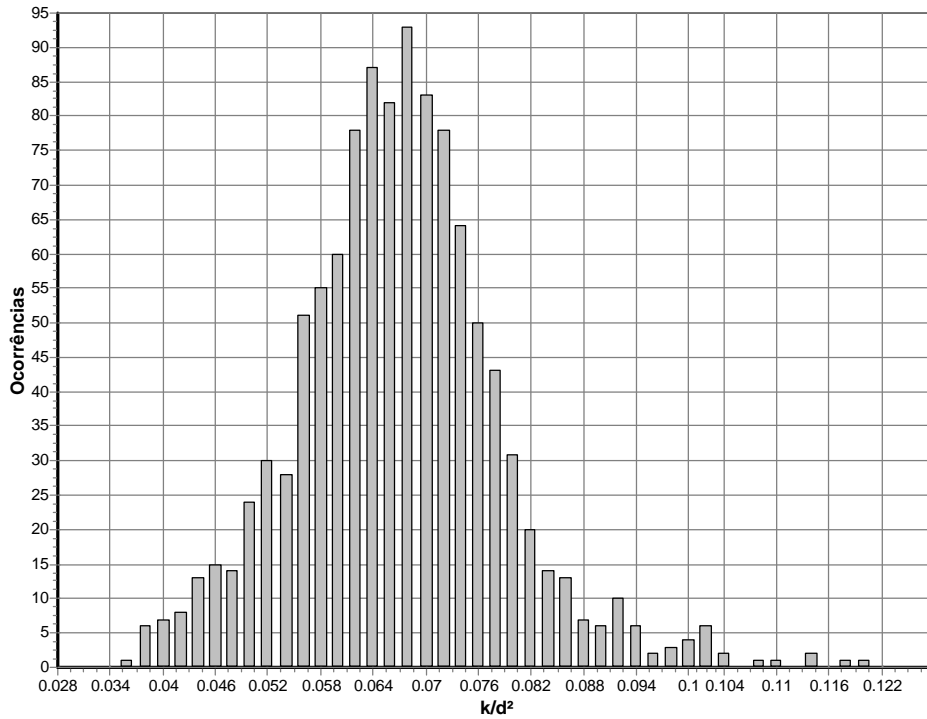


Figura 5.24 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,35.

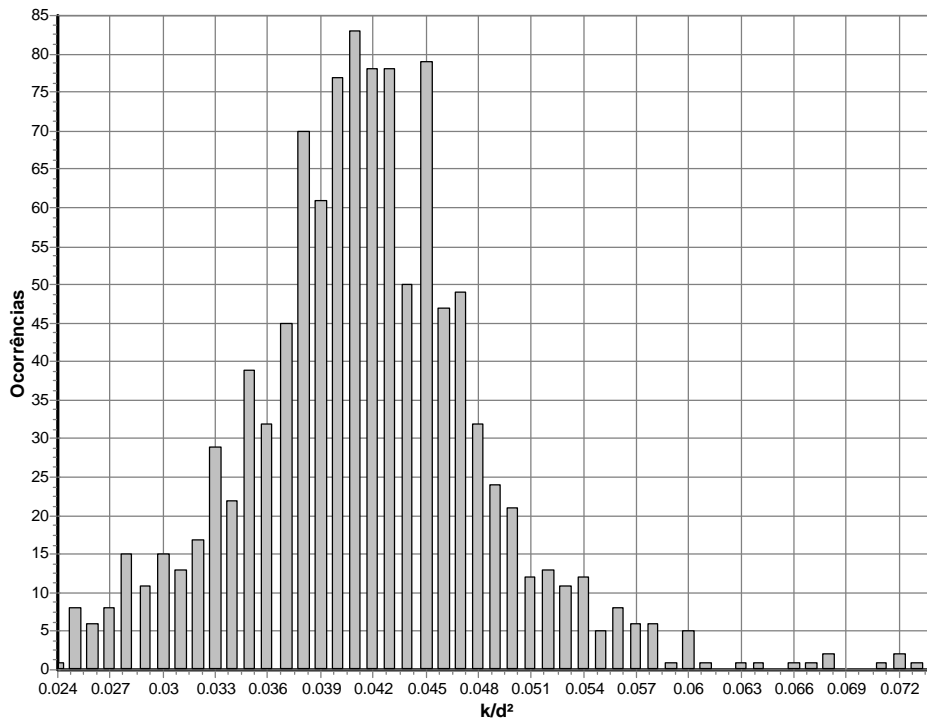


Figura 5.25 - Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,40.

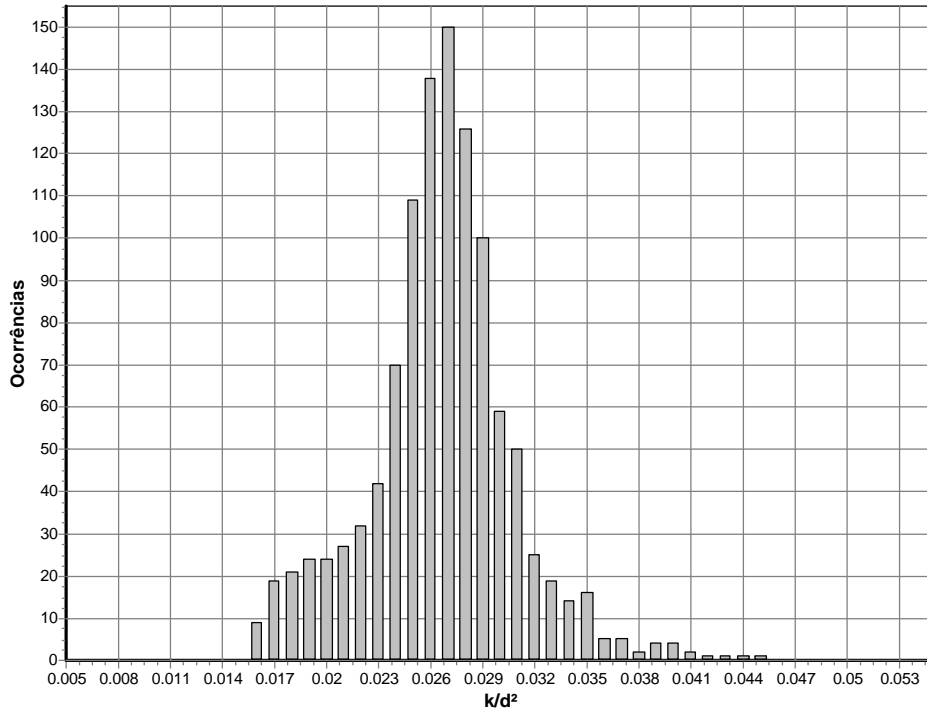


Figura 5.26- Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,45.

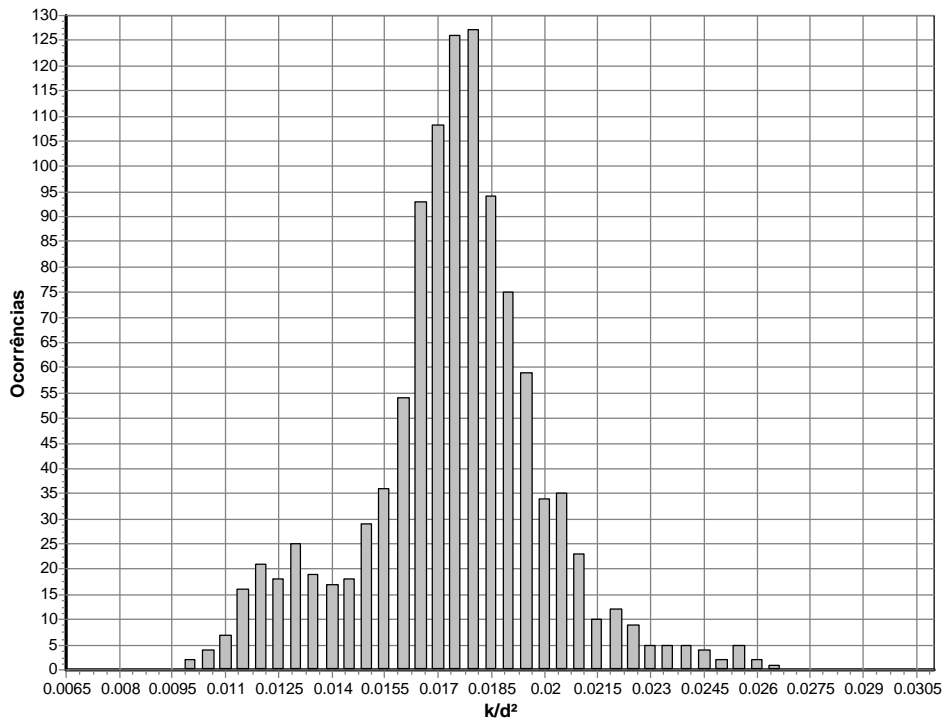


Figura 5.27- Histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,50.

Pela análise das Figuras 5.18 a 5.27, percebe-se que, para todas as concentrações analisadas, a forma de distribuição é semelhante. O número de ocorrências começa pequeno para baixos valores de permeabilidade, cresce bastante em um determinado intervalo e volta a cair para valores mais altos de permeabilidade.

Em alguns casos, foram encontradas algumas faixas com poucas ocorrências onde era esperado um maior número de ocorrências. No histograma das permeabilidades encontradas para a concentração de 0,4 (Figura 5.25) por exemplo, o número de ocorrências na faixa de valores de permeabilidade em torno de 0,044 é muito menor do que em suas “faixas vizinhas”, 0,043 e 0,045. Isto ocorre, provavelmente, devido ao reduzido número de amostras considerado.

A Tabela 5.21 foi elaborada com base nos histogramas. As faixas com maior ocorrência de dados apresentadas nos gráficos são combinadas de forma a se obter uma única faixa mais larga, abrangendo aproximadamente 80% das amostras.

Tabela 5.21- Faixas de permeabilidade para os resultados das Figuras 5.18 a 5.27.

<i>c</i>	Faixa de permeabilidade	Frequência
0,05	2,4 a 4,2	≈ 80%
0,10	0,8 a 1,4	≈ 85%
0,15	0,4 a 0,66	≈ 80%
0,20	0,22 a 0,37	≈ 85%
0,25	0,135 a 0,21	≈ 81%
0,30	0,09 a 0,12	≈ 80%
0,35	0,05 a 0,08	≈ 85%
0,40	0,033 a 0,048	≈ 80%
0,45	0,023 a 0,031	≈ 77%
0,50	0,015 a 0,020	≈ 80%

Os valores apresentados nos histogramas e na Tabela 5.21 abrangem todas as amostras consideradas. À medida que se aumenta o número de cilindros contidos em uma célula periódica, o arranjo se torna mais irregular, o que ocasiona um aumento em sua permeabilidade. Para representar um meio poroso real, é necessário se determinar quantos cilindros a célula periódica deve conter.

As figuras a seguir mostram a variação do valor da permeabilidade à medida que se aumenta o número de cilindros. A Figura 5.28 apresenta os valores das permeabilidades médias para cada concentração, em função do número de cilindros, e a Figura 5.29 apresenta esses mesmos valores, em função do comprimento característico da célula ($I^* \equiv I/d$). Já a Figura 5.30 apresenta a variação do desvio padrão da amostra considerada em função do comprimento característico da célula.

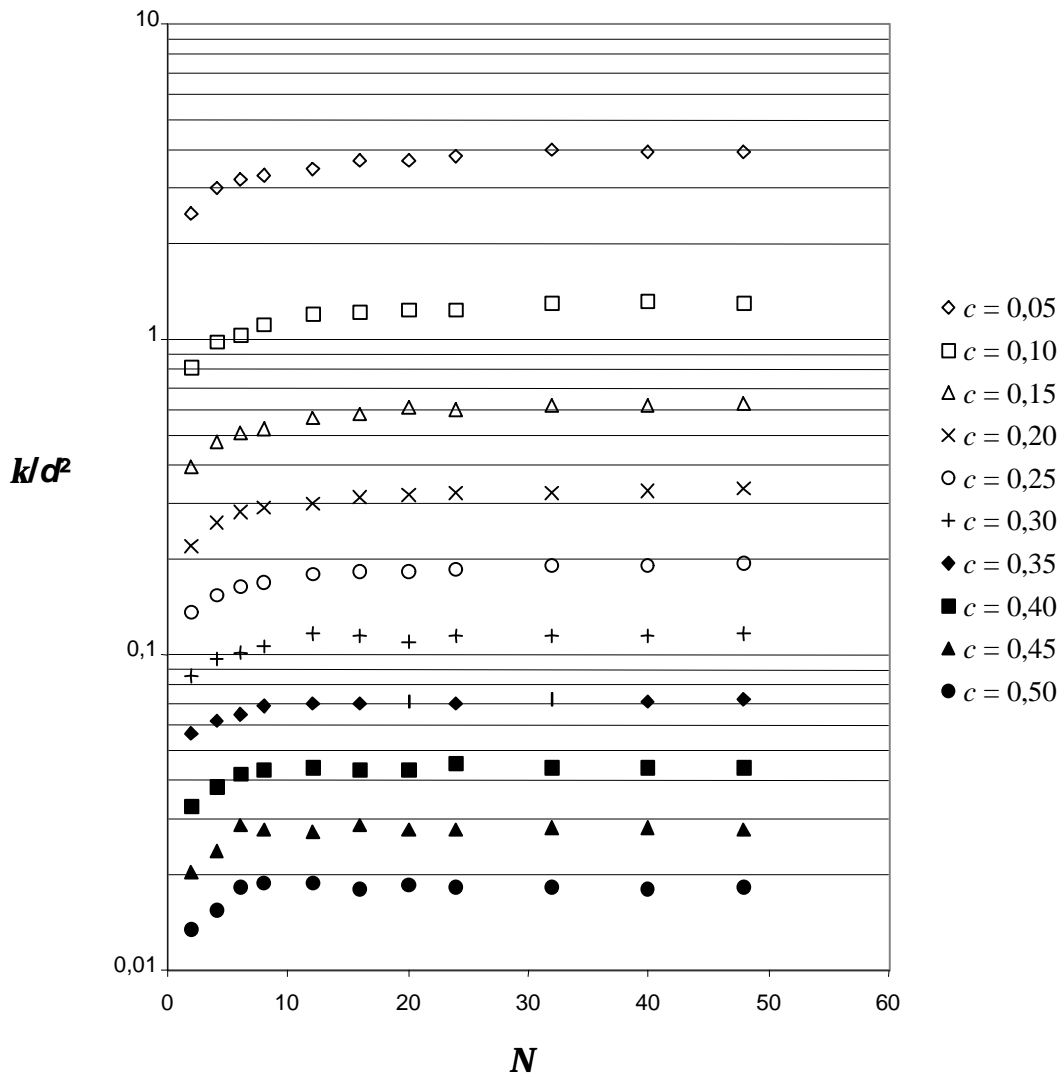


Figura 5.28 - Médias das permeabilidades para 100 arranjos, para diversas concentrações, em função do número de cilindros.

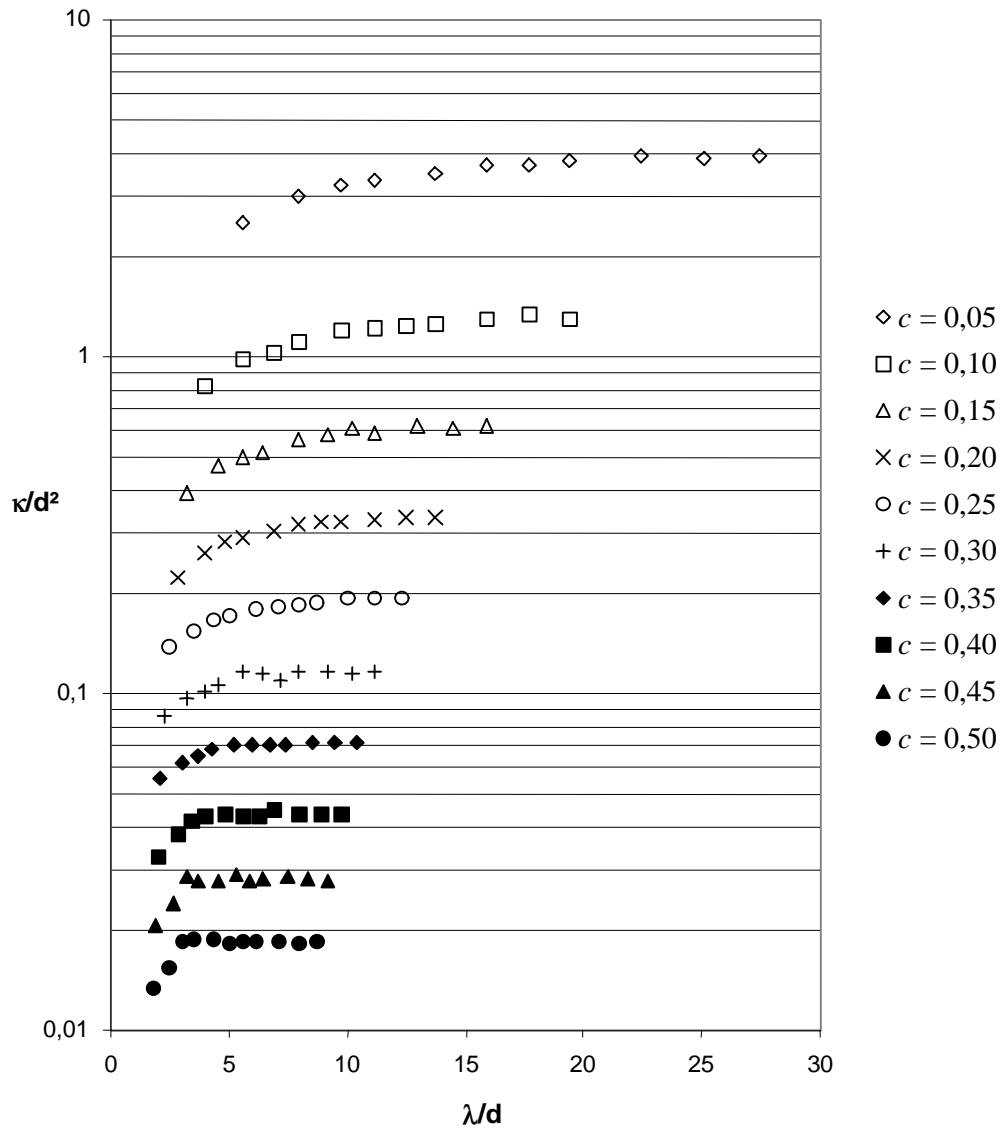


Figura 5.29 - Médias das permeabilidades para 100 arranjos, para diversas concentrações, em função do comprimento característico da célula.

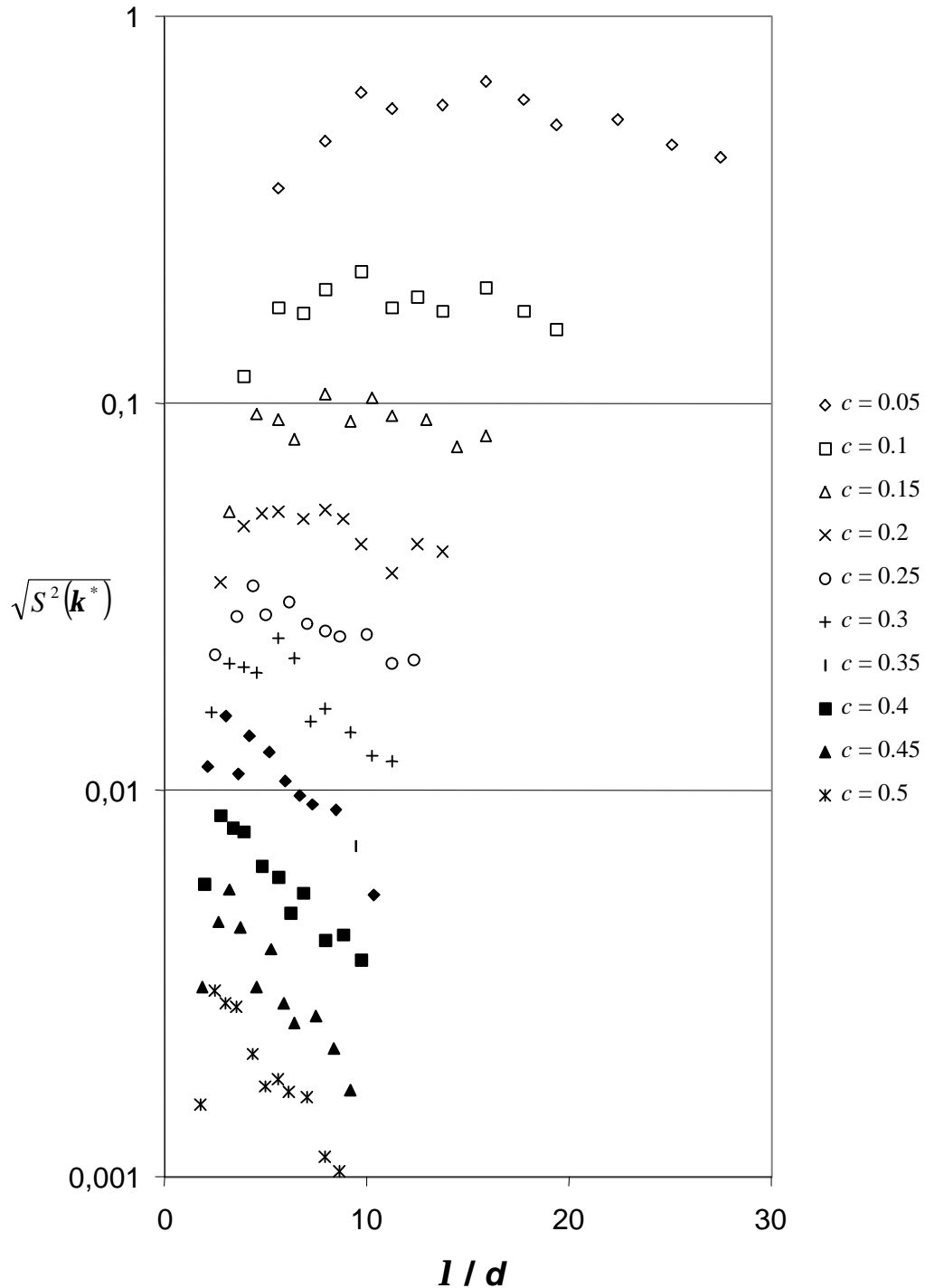


Figura 5.30 - Desvios padrões das amostras contendo 100 arranjos, para diversas concentrações, em função do comprimento característico da célula.

Em todas as concentrações, observa-se a mesma tendência: o valor da permeabilidade é maior para maiores números de cilindros e cresce até se manter aproximadamente constante. Assim, como esperado, à medida que é aumentado o número de cilindros, o valor da permeabilidade se aproxima de um valor assintótico. Observa-se que a permeabilidade longitudinal de arranjos randômicos pode ser cerca de 90% maior do que em arranjos regulares, contrapondo-se, assim, a JACKSON & JAMES (1986), que previram que o aumento seria na faixa de 50%.

Nota-se que, nas concentrações mais altas, o desvio padrão tende a cair a medida que aumenta-se o tamanho da célula periódica. Esta tendência não é verificada nos casos de concentrações mais baixas, até o máximo tamanho de célula considerado. Espera-se que, ao se aumentar ainda mais o tamanho da célula periódica, o desvio padrão tenda a baixar para todas as concentrações, visto que com uma célula periódica maior a disposição das fibras sofre menos alterações.

As Tabelas 5.22, 5.23 e 5.24 apresentam as médias e desvios padrões dos resultados encontrados para todas as concentrações. Na Tabela 5.22, são incluídas todas as células consideradas, independentemente do número de cilindros. A Tabela 5.23 é baseada apenas em valores a partir de 16 cilindros, ponto em que aparentemente os valores começam a se aproximar do valor assintótico. Apenas os valores de permeabilidade para os casos com 48 cilindros na célula periódica são considerados nas médias apresentadas na Tabela 5.24.

Tabela 5.22 - Médias e desvios padrões dos resultados de todas as células.

Concentração	Permeabilidade média	Desvio padrão
0,05	3,508	$6,940 \times 10^{-1}$
0,10	1,162	$2,337 \times 10^{-1}$
0,15	$5,559 \times 10^{-1}$	$1,123 \times 10^{-1}$
0,20	$3,014 \times 10^{-1}$	$5,715 \times 10^{-2}$
0,25	$1,763 \times 10^{-1}$	$3,154 \times 10^{-2}$
0,30	$1,087 \times 10^{-1}$	$2,050 \times 10^{-2}$
0,35	$6,793 \times 10^{-2}$	$1,180 \times 10^{-2}$
0,40	$4,212 \times 10^{-2}$	$6,925 \times 10^{-3}$
0,45	$2,711 \times 10^{-2}$	$4,223 \times 10^{-3}$
0,50	$1,769 \times 10^{-2}$	$2,589 \times 10^{-3}$

Tabela 5.23 - Médias e desvios padrões dos resultados a partir de 16 cilindros por célula.

Concentração	Permeabilidade média	Desvio padrão
0,05	3,837	$5,560 \times 10^{-1}$
0,10	1,273	$1,820 \times 10^{-1}$
0,15	$6,087 \times 10^{-1}$	$9,033 \times 10^{-2}$
0,20	$3,263 \times 10^{-1}$	$4,500 \times 10^{-2}$
0,25	$1,888 \times 10^{-1}$	$2,474 \times 10^{-2}$
0,30	$1,148 \times 10^{-1}$	$1,567 \times 10^{-2}$
0,35	$7,093 \times 10^{-2}$	$8,649 \times 10^{-3}$
0,40	$4,389 \times 10^{-2}$	$4,791 \times 10^{-3}$
0,45	$2,824 \times 10^{-2}$	$2,700 \times 10^{-3}$
0,50	$1,832 \times 10^{-2}$	$1,516 \times 10^{-3}$

Tabela 5.24 - Médias e desvios padrões dos resultados de 48 cilindros por célula.

Concentração	Permeabilidade média	Desvio padrão
0,05	3,928	$4,320 \times 10^{-1}$
0,10	1,297	$1,551 \times 10^{-1}$
0,15	$6,254 \times 10^{-1}$	$8,206 \times 10^{-2}$
0,20	$3,344 \times 10^{-1}$	$4,142 \times 10^{-2}$
0,25	$1,941 \times 10^{-1}$	$2,163 \times 10^{-2}$
0,30	$1,165 \times 10^{-1}$	$1,183 \times 10^{-2}$
0,35	$7,195 \times 10^{-2}$	$5,348 \times 10^{-3}$
0,40	$4,378 \times 10^{-2}$	$3,647 \times 10^{-3}$
0,45	$2,786 \times 10^{-2}$	$1,670 \times 10^{-3}$
0,50	$1,841 \times 10^{-2}$	$1,031 \times 10^{-3}$

Analisando as tabelas, percebe-se a tendência dos valores de permeabilidade. Em todas as concentrações, à medida que são analisados casos com maiores números de cilindros, a permeabilidade aumenta, se aproximando de um valor assintótico. Em virtude disto, serão considerados na análise posterior somente os resultados apresentados na Tabela 5.24.

Para avaliar a utilidade dos valores encontrados, é feita uma comparação com resultados experimentais. SULLIVAN (1942) estudou o escoamento longitudinal a um meio poroso fibroso composto de diversos tipos de lã e cabelos. Seus resultados estão apresentados na

Tabela 5.25. A Figura 5.31 mostra a comparação desses resultados com os valores calculados pela metodologia adotada nessa tese, que foram apresentados na Tabela 5.24.

Tabela 5.25 - Valores de permeabilidade obtidos experimentalmente por SULLIVAN (1942) em função da concentração.

Lã		Cabelos		Fibras de algodão	
<i>c</i>	<i>k</i> *	<i>c</i>	<i>k</i> *	<i>c</i>	<i>k</i> *
0,156	6,3803 x10 ⁻¹	0,55	1,8103 x10 ⁻²	0,455	2,1156 x10 ⁻²
0,1169	1,0499	0,344	1,2122 x10 ⁻¹	0,304	9,8282 x10 ⁻²
0,0935	1,5617	0,654	6,1139 x10 ⁻³	0,256	1,6784 x10 ⁻¹
0,0779	2,1028	0,645	6,4011 x10 ⁻³	0,248	1,8389 x10 ⁻¹
0,0585	3,5281			0,218	2,5988 x10 ⁻¹
0,0468	5,0028			0,163	5,4737 x10 ⁻¹
0,039	6,5709			0,132	8,6882 x10 ⁻¹
0,0334	7,9681			0,074	2,6192 x10 ⁻⁰
0,0292	9,4459			0,445	2,2388 x10 ⁻²
0,026	1,0953 x10 ⁺¹			0,368	4,7552 x10 ⁻²
0,0234	1,2672 x10 ⁺¹			0,316	7,9483 x10 ⁻²
0,0213	1,4445 x10 ⁺¹			0,267	1,4387 x10 ⁻¹
0,0195	1,6571 x10 ⁺¹			0,216	2,4828 x10 ⁻¹
0,018	1,8545 x10 ⁺¹			0,157	5,8200 x10 ⁻¹
0,0167	2,0786 x10 ⁺¹			0,148	6,4172 x10 ⁻¹
0,0156	2,3178 x10 ⁺¹			0,131	8,6909 x10 ⁻¹
0,362	7,9396 x10 ⁻²			0,104	1,3902 x10 ⁻⁰
0,36	8,4845 x10 ⁻²			0,379	4,3237 x10 ⁻²
0,195	4,1623 x10 ⁻¹			0,374	4,5108 x10 ⁻²
0,139	7,5909 x10 ⁻¹			0,24	1,9521 x10 ⁻¹
0,112	1,2970			0,191	3,4889 x10 ⁻¹
0,098	1,5607			0,148	6,5119 x10 ⁻¹

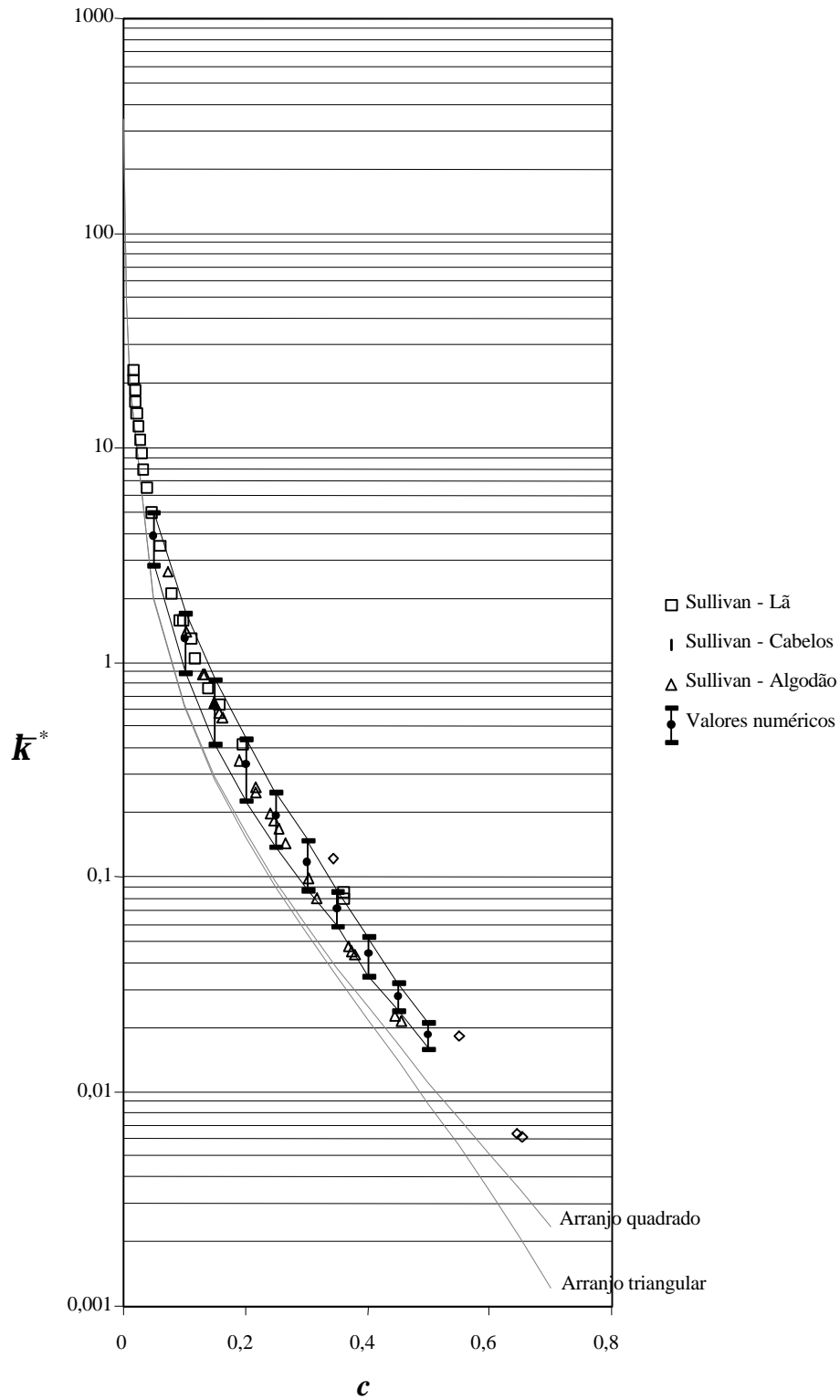


Figura 5.31 - Comparação dos valores calculados com os resultados obtidos experimentalmente por SULLIVAN (1942).

A partir da análise do gráfico da Figura 5.31, pode-se concluir que a maior parte dos valores medidos por SULLIVAN (1942) estão dentro da faixa de permeabilidade obtida com a metodologia adotada nessa tese. Estão fora desta faixa alguns valores de permeabilidade de meios formados por fibras de algodão e todos os valores para meios compostos por cabelos. Para meios formados por fibras de lã, a maior parte dos resultados experimentais disponíveis são referentes a meios com concentrações menores do que a mínima concentração considerada nessa tese.

Apesar de haver diferenças entre os meios testados por Sullivan e os meios simulados nessa tese (como possibilidade de fibras não posicionadas paralelamente umas às outras, fibras permeáveis, fibras não circulares), a boa concordância dos resultados experimentais com os resultados numéricos, ainda que possivelmente fortuita, revela a importância de se considerar microestruturas mais complexas do que aquelas dos arranjos regulares, principalmente em concentrações mais altas.

Para baixíssimas concentrações, percebe-se que as curvas de arranjo quadrado e triangular praticamente se sobrepõem. Lembrando os resultados obtidos para a validação, mesmo a curva com os valores de HAPPEL (1959) utilizando o modelo de célula unitária circular se confunde com as demais. Chega-se à conclusão de que, para baixíssimas concentrações, a influência da distribuição das fibras na permeabilidade do meio é muito pequena, sendo viável a utilização de valores obtidos em meios regulares.